

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Importance des effets relativistes et de marée dans les systèmes binaires

BATAILLE, Manon

Award date:
2014

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Importance des effets relativistes et de marée dans les systèmes binaires

Manon Bataille

Promoteurs : Anne-Sophie Libert & Anne Lemaitre

Juin 2014

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes co-promotrices Anne-Sophie Libert et Anne Lemaitre qui m'ont permis d'écrire ce mémoire en mécanique céleste en collaboration avec elles. Je voudrais aussi remercier Alexandre Correia, mon maître de stage, qui a accepté de m'accueillir au département de physique de l'Université d'Aveiro, au Portugal, pendant trois mois. Leur présence et leur aide continues ainsi que la patience dont ils ont fait preuve m'ont beaucoup apporté et m'ont permis d'en apprendre davantage sur ce sujet qui m'attire. Ils m'ont aussi transmis leur goût pour la recherche.

Je remercie aussi Benoit Noyelles qui m'a enseigné les bases de la mécanique céleste par le cours "Dynamique céleste et résonances". Toutes ces bases m'ont beaucoup aidée. Le travail que nous avons dû réaliser m'a donné envie de continuer mes études dans cette direction.

Je remercie également Annick Sarteneau, Benoit Noyelles, Anne Lemaitre et Anne-Sophie Libert pour la lecture de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont à ma famille pour leur soutien et la relecture assidue de l'orthographe de ce manuscrit. Je n'oublierai pas non plus les conseils et la présence de mes collègues de bureau au Portugal durant mes trois mois de stage.

Abstract

Les systèmes d'étoiles binaires représentent plus de la moitié de la population des étoiles. Des observations récentes ont montré que certains d'entre eux abritent une exoplanète. Dans ce travail, l'évolution à long terme des systèmes binaires possédant un compagnon planétaire ou stellaire est analysée au moyen du développement analytique octupole auquel sont ajoutés les effets relativistes et de marée (masses non ponctuelles). Cette approche décrit avec précision la dynamique des systèmes triples hiérarchiques, quelles que soient les masses des différents corps. L'objectif de cette étude est de déterminer l'importance de ces deux corrections dans la dynamique des systèmes. En particulier, des cartes évaluant les ordres de grandeur de chaque contribution hamiltonienne sont élaborées pour un large éventail de masses et de demi-grand axes du deuxième corps, dans le cas des effets conservatifs. La question de la formation des systèmes binaires est également abordée, et ce dans l'optique de comprendre l'accumulation de compagnons planétaires de faible période (entre 1 et 10 jours). Une étude statistique de l'évolution séculaire de systèmes non coplanaires est réalisée, prenant en compte à la fois l'évolution orbitale et des spins des corps. Il s'ensuit que la combinaison du mécanisme de Kozai et des marées dissipatives est responsable de la migration des planètes vers de faibles périodes.

Mots clés : Systèmes binaires - Effets de marée - Effets relativistes - Hamiltonien - Théorie octupole - Systèmes hiérarchiques - Mécanisme de Kozai - Jupiter chaud

Binary systems represent more than half of the population of stars. Recent observations showed that some of them have a planetary companion. In this work, long term evolution of binary systems with planetary or stellar companion is analyzed with help of octupole analytical development. We add relativistic effects and tidal effects (non-point masses). This approach describes the dynamics of triples hierarchical systems for any masses with high precision. The goal of this study is to determinate the importance of these corrections in the dynamic of the system. In particular, we draw maps which represent magnitude of each component of Hamiltonian. These maps are developed for a large range of masses and semi-major axes of the second body, in the case of conservative effects. We discuss the formation of binary systems. We desire understand the accumulation of planetary companions with low period (between 1 and 10 days). A statistical study of the secular evolution of non coplanar systems is made. Here, we consider orbital evolution and spin evolution. The conclusion is that the combinaison of Kozai mechanism and dissipative tidal is responsible of the migration of planets with low periods.

Key words : Binary systems - Tidal effects - Relativistic effects - Hamiltonian - Octupole theory - Hierarchical systems - Kozai mechanism - Hot Jupiter

Table des matières

Introduction	1
1 Étoiles binaires	3
1.1 Évolution stellaire	3
1.2 Diagramme de Hertzsprung-Russell	4
1.3 Définition des étoiles binaires	5
1.4 Détection des étoiles binaires	7
1.5 Classification selon le lobe de Roche	7
1.5.1 Binaires détachées	9
1.5.2 Binaires semi-détachées	9
1.5.3 Binaires à contact	10
1.6 Étoiles binaires abritant un compagnon planétaire	10
1.6.1 Les effets de marée	11
1.6.2 La relativité	12
2 Le problème des trois corps	17
2.1 Hamiltonien du problème des trois corps	17
2.1.1 Introduction à la dynamique du problème	17
2.1.2 Éléments képlériens et éléments de Delaunay	19
2.1.3 Hamiltonien séculaire du problème des trois corps sans corrections	20
2.2 Hamiltonien avec corrections	21
3 Les corrections relativistes	25
3.1 Mise en contexte	25
3.2 Lagrangien du problème des deux corps	27
3.3 Formulation hamiltonienne	33
3.4 Moyennisation de \mathcal{H}_{GR}	34
3.5 Comparaison avec d'autres articles	42
4 Masses non ponctuelles	45
4.1 Déformation du corps primaire liée à sa rotation	45
4.1.1 Origine de l'aplatissement de l'étoile	45
4.1.2 Moyennisation de la composante hamiltonienne $\mathcal{H}_{\text{spin}}$	60
4.2 Bourrelet de marée	64
4.2.1 Les effets de marée	64
4.2.2 Moyennisation de la composante hamiltonienne \mathcal{H}_{TB}	70
4.3 Comparaison avec d'autres articles	72

4.3.1	Comparaison des expressions liées au spin	72
4.3.2	Comparaison des expressions de l'effet de marée	74
5	Résultats numériques	77
5.1	Evolutions numériques des éléments orbitaux	77
5.2	Importance des corrections relativistes et de marée	79
5.2.1	Carte des composantes hamiltoniennes	86
5.3	Évolution de systèmes	88
5.3.1	Système 1 : Soleil-Terre-Jupiter	88
5.3.2	Système 2 : Soleil-Terre chaude-Jupiter	93
5.3.3	Système 3 : Soleil-Jupiter chaud-Jupiter	96
5.3.4	Système 4 : Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter	97
5.4	Importance de l'excentricité dans les résultats	100
6	Les effets de marée dans les étoiles binaires	103
6.1	Introduction	103
6.1.1	Jupiter chauds	104
6.1.2	Cycles de Kozai et "tidal friction"	105
6.1.3	Marées dissipatives	105
6.2	Équations du mouvement	106
6.3	Comparaison des deux systèmes d'équations	115
6.3.1	Vecteur excentricité	116
6.3.2	Moments angulaires de rotation	121
6.3.3	Moment angulaire orbital	124
6.4	Résultats de Fabrycky et Tremaine	125
6.4.1	Génération des systèmes	125
6.4.2	Évolutions des systèmes	128
6.5	Migration des planètes : compréhension du pic	140
	Conclusion	149
	Bibliographie	152
	Annexes	156
A	Moyennisation : changement de variables	157
B	Lagrangien (corrections relativistes)	161
C	Harmoniques sphériques	165
D	Fonction Gamma	167
E	Marées dissipatives	169
F	Equations du mouvement en éléments orbitaux	173

G Codes	177
G.1 Composantes hamiltoniennes	177
G.1.1 Programme principal	177
G.1.2 Module paramètres	178
G.2 Évolutions des systèmes	180
G.2.1 Programme principal	180
G.2.2 Modules	182
G.2.3 Calculs des équations du mouvement	197

Introduction

Les systèmes binaires sont des systèmes de deux étoiles liées gravitationnellement. Ils représentent la moitié de la population totale des étoiles, c'est pourquoi il est important de les étudier. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'évolution à long terme des systèmes de trois corps, composé d'un système binaire et d'un troisième compagnon (soit une planète soit une étoile). La théorie octupole appliquée à ces systèmes a déjà été étudiée dans un précédent travail de fin d'études (Auquier [1]). Y ajouter les corrections relativistes et les effets de marée constituait une perspective de ce travail. Nous étudions donc ici ce prolongement. Le but de ce travail est double. Tout d'abord, il est de développer et étudier la formulation hamiltonienne des corrections relativistes et des corrections de marées conservatives. L'Hamiltonien comprenant ces deux corrections est traité dans Migaszewski et Gozdziewski [24]. Nous voulons comprendre ces deux effets ainsi que comprendre l'importance qu'ils ont dans l'Hamiltonien total. Nous désirons déterminer dans quel cas il est nécessaire de les considérer et dans quel cas on peut les négliger. Les chapitres 3 à 5 sont consacrés à cet objectif. Le deuxième objectif de ce travail consiste en une étude statistique portant sur la formation de ces systèmes, en particulier sur l'accumulation de compagnons planétaires de faible période. Pour ce faire, nous reproduisons les résultats de l'étude de Fabrycky et Tremaine [12], à l'aide des équations de Correia et al. [7].

Le premier chapitre sera un chapitre de mise en contexte. Nous y définirons les systèmes binaires, les exoplanètes et les effets de marée. Nous y discuterons aussi très brièvement de la relativité générale.

Le deuxième chapitre introduira la théorie octupole. Cette théorie avait déjà été étudiée dans un travail de fin d'études (Auquier [1]). Nous résumerons les idées principales nécessaires à la compréhension de cette théorie. Dans ce chapitre, nous expliquerons aussi les corrections que nous allons considérer, à savoir les corrections de la relativité, les corrections de marée subies par l'étoile centrale dues à la présence de la deuxième masse et enfin la déformation subie par le corps central du fait de sa rotation sur lui-même. Nous expliquerons finalement comment moyenner l'Hamiltonien par rapport aux anomalies moyennes.

Le troisième chapitre sera consacré aux corrections relativistes. L'article de référence pour ce chapitre sera Richardson et Kelly [40]. Après avoir recalculé le Lagrangien lié à ces corrections, nous développerons l'Hamiltonien. Une fois celui-ci obtenu, nous le moyennerons de façon à obtenir l'Hamiltonien moyenné avec corrections relativistes. Nous calculerons alors la variation de l'argument du périastre due à la relativité. Nous terminerons ce chapitre par comparer nos équations avec celles de l'article de Fabrycky et Tremaine

[12] et Nagasawa et Lin [27].

Le quatrième chapitre sera consacré à la déformation de la masse centrale. La première section établira l'Hamiltonien lié à la déformation de l'étoile due à sa rotation sur elle-même. La deuxième section détaillera l'Hamiltonien lié à la déformation de l'étoile due à la présence du deuxième corps. Dans les deux cas, une fois la formulation de l'Hamiltonien donnée, nous la moyennerons. Enfin, dans la dernière section, nous comparerons les équations de notre travail avec les équations des articles de Fabrycky et Tremaine [12] et Nagasawa et Lin [27].

Le cinquième chapitre aura pour but de déterminer dans quel cas une ou deux correction(s) peut (peuvent) être négligée(s) et dans quel cas il est nécessaire d'en tenir compte. Pour déterminer l'importance des corrections, nous travaillerons avec trois systèmes, "Soleil-Terre-Jupiter", "Soleil-Terre-masse négligeable" et "Soleil-Jupiter-masse négligeable", pour lesquels la distance entre le Soleil et le deuxième corps varie. Nous nous intéresserons aux ordres de grandeur des différentes composantes hamiltoniennes et généraliserons ce résultat en élaborant des cartes évaluant ces composantes pour un large éventail de masses et de demi-grands axes du deuxième corps.

Enfin, le sixième chapitre portera sur la question de la formation des systèmes binaires avec compagnon planétaire et sera consacré à une étude statistique concernant les périodes orbitales du compagnon (Fabrycky et Tremaine [12]). Nous commencerons par décrire les cycles de Kozai et les marées dissipatives, avant d'introduire le formalisme vectoriel que nous utiliserons pour les équations de ce chapitre (Correia [7]). Le but de ce chapitre sera de comprendre l'accumulation de compagnons planétaires de faible période (entre 1 et 10 jours) dans les systèmes binaires. Nous simplifierons peu à peu notre système d'équations afin de ne conserver que les termes essentiels. Ceux-ci montreront en quoi la combinaison de l'effet de Kozai et des marées dissipatives sont responsables de cette migration des planètes vers des faibles périodes.

Chapitre 1

Etoiles binaires

Dans ce premier chapitre, les concepts fondamentaux en lien avec les étoiles binaires sont décrits. En particulier, nous rappelons le schéma d'évolution d'une étoile et discutons le diagramme de Hertzsprung-Russell. Ensuite, nous définissons les étoiles binaires et citons les méthodes de détection de ces systèmes.

Nous nous attardons aussi sur la distance séparant les deux étoiles composant la binaire et caractérisons les binaires en fonction de cette distance, grâce à la notion de *lobe de Roche*. Enfin, nous décrivons les systèmes de deux étoiles qui abritent une exoplanète, en distinguant les orbites possibles pour ce compagnon planétaire. Nous terminons ce chapitre par introduire brièvement le concept de relativité ainsi que des effets de marée.

1.1 Évolution stellaire

L'évolution d'une étoile¹, de sa naissance à sa mort, est illustrée à la figure 1.1. On peut donc voir que la taille de l'étoile évolue au cours de sa vie. Cela nous permettra de mieux comprendre quand une étoile peut remplir son lobe de Roche (voir section 1.5).

L'évolution d'une étoile dépend de sa masse, comme indiqué à la figure 1.1. Tout d'abord, l'étoile est une proto-étoile. Elle entre ensuite dans la séquence principale². Lorsqu'elle entre dans celle-ci, elle commence à brûler l'hydrogène contenu dans son noyau. Une fois que la combustion est terminée, l'étoile sort de la séquence principale. Après la séquence principale, l'évolution de l'étoile va dépendre de sa masse.

Si l'étoile est de faible masse, elle se transforme en géante rouge. Pendant ce temps, l'étoile brûle tout l'hydrogène et l'hélium de ses couches supérieures. Le noyau se contracte alors et l'énergie libérée fait gonfler la partie externe de l'étoile. L'étoile est maintenant une nébuleuse planétaire. Le noyau de celle-ci se contracte et expulse une partie de sa masse, ne laissant qu'un noyau lourd et compact qui se refroidit. L'étoile est alors à la dernière étape de sa vie : une naine blanche.

Si l'étoile est massive, elle évolue de façon légèrement différente. Son évolution est plus

1. Pour décrire l'évolution d'une étoile, nous nous sommes appuyés sur les notes disponibles dans [28] et [37].

2. La séquence principale comprend l'ensemble des étoiles en train de brûler leur hydrogène. Pendant la quasi totalité de leur vie, les étoiles font partie de la séquence principale. Cette notion est plus détaillée dans la section 1.2.

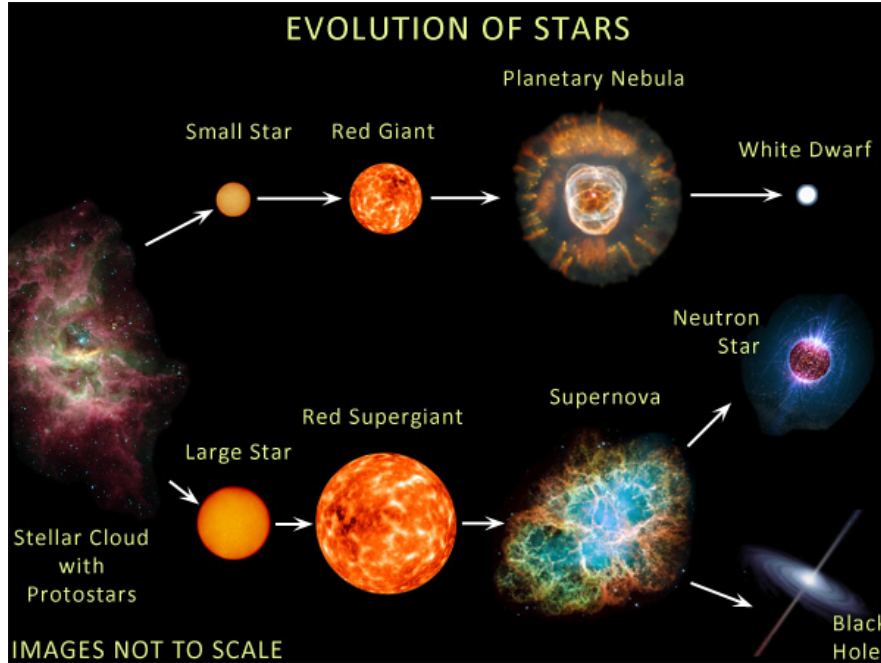


FIGURE 1.1 – Évolution d’une étoile, de sa naissance jusqu’à son évolution en étoile plus massive, figure issue de [10]

rapide car sa température est plus élevée. Après combustion de l’hydrogène pendant la séquence principale, l’étoile devient une super géante rouge. Des réactions chimiques se produisent, la dernière étant la production de fer. Ensuite, l’étoile se transforme en supernova : le noyau s’effondre sur lui-même. Toutes les couches externes rebondissent et sont expulsées suite à l’effondrement. Ne reste qu’un noyau lourd : l’étoile à neutrons. Il est aussi possible que l’étoile termine sa vie en trou noir si elle est très massive.

1.2 Diagramme de Hertzsprung-Russell

Le *diagramme de Hertzsprung-Russell* (HR) représente la luminosité des étoiles en fonction de leurs température et type spectral. La figure 1.2 en constitue une représentation. La séquence principale est la zone centrale de ce diagramme³.

La séquence principale rassemble les étoiles du diagramme HR qui sont en train de brûler leur hydrogène. C’est une « bande » d’étoiles qui traverse le diagramme, allant des étoiles chaudes et lumineuses aux étoiles froides et peu lumineuses. La majorité des étoiles se situe dans cette bande. Ceci s’explique par le fait que les étoiles y restent durant toute leur vie, sauf à leur naissance et à leur mort.

Les étoiles plus jeunes, au début de leur vie « adulte », se situent dans le coin inférieur droit du diagramme. Ce sont des étoiles froides et peu lumineuses.

Notons qu’une étoile dans la séquence principale est une étoile « standard ». Il y a d’autres « groupes » d’étoiles visibles sur le diagramme HR : les géantes, les supergéantes et les

3. Une description détaillée peut être consultée dans [33] et [30].

naines blanches. Ces différents groupes correspondent au début et à la fin de la vie d'une étoile, *cf.* section 1.1.

Sur la figure 1.2, on peut voir des étoiles de couleur différente. Une étoile chaude et lumineuse (les deux caractéristiques sont liées, comme on peut le voir sur le diagramme HR) est bleue alors qu'une étoile froide et peu lumineuse est rouge.

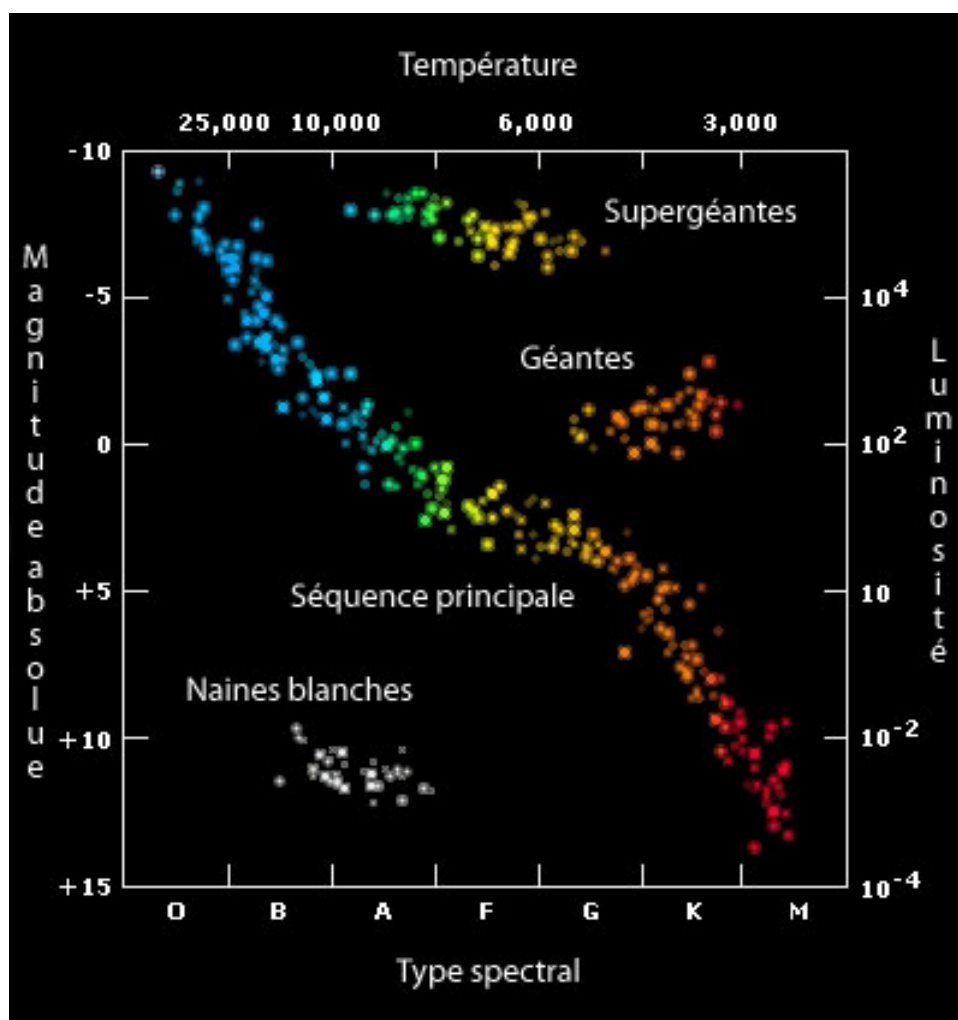


FIGURE 1.2 – Diagramme de Hertzsprung-Russell, représentant la luminosité des étoiles en fonction de leur température, figure issue de [11]

1.3 Définition des étoiles binaires

Une *étoile binaire*, aussi dénommé *système binaire* ou *binaire* dans la suite, est un système de deux étoiles liées par la gravitation et qui orbitent autour de leur centre de gravité commun. Cette notion est à distinguer de celle d'*étoile double*, qui nous donne l'illusion optique que les deux étoiles sont proches mais elles sont, en réalité, loin l'une de

l'autre.

L'étoile la plus lumineuse d'une étoile binaire sera nommée l'étoile « A » ou « l'étoile primaire » alors que la deuxième étoile est nommée « B » ou « étoile secondaire ». Citons comme exemple Sirius, une étoile binaire dont la primaire est deux fois plus massive que le Soleil et 25 fois plus lumineuse. Cette binaire est composée d'une étoile de la séquence principale (Sirius A) et d'une naine blanche (Sirius B).

Les figures 1.3 et 1.4 illustrent deux configurations de système binaire. La figure 1.3 représente un système où une des deux étoiles est beaucoup plus massive. Dans ce cas, les orbites des deux étoiles ne se croisent pas. Le barycentre est proche de l'étoile plus massive.

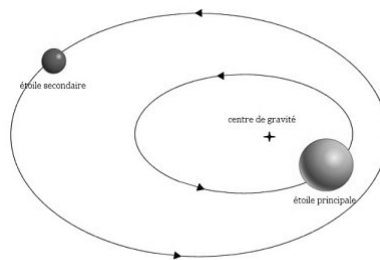


FIGURE 1.3 – Orbites d'une étoile binaire, où l'une des deux étoiles domine gravitationnellement le système, figure issue de [20]

La figure 1.4 représente un système où les deux étoiles ont des masses similaires. Dans ce cas, les deux orbites se croisent.

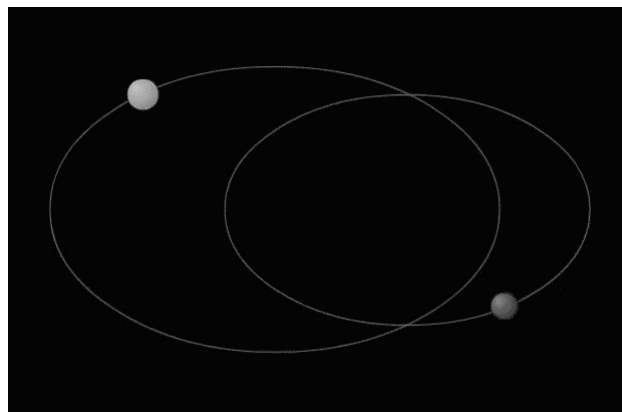


FIGURE 1.4 – Orbites d'une étoile binaire de masses similaires, figure issue de [14]

Notons qu'un système binaire est également un terme générique décrivant tout système composé de deux corps. Dans la suite de ce mémoire, sauf mention contraire, par convention, un système binaire désignera toujours une étoile binaire.

1.4 Détection des étoiles binaires

On peut classer les étoiles binaires en fonction de leur méthode de détection. Le site de l'Observatoire de Paris [35] dénombre quatre catégories d'étoiles binaires. Celles-ci sont citées ci-dessous :

- Les binaires visuelles sont détectées à l'aide d'un télescope.
- Les binaires astrométriques sont détectées après avoir mesuré le mouvement particulier d'un corps, induisant la présence d'un deuxième objet. Cette technique de détection est aussi utilisée pour détecter les exoplanètes.
- Les binaires spectroscopiques sont détectées en mesurant les vitesses radiales des deux composantes de la binaire.
- Les binaires à éclipse, aussi appelées binaires photométriques, sont les binaires détectées grâce aux changements de luminosité, dus à un phénomène d'éclipse. Si les deux étoiles sont très proches, il arrive qu'une des deux étoiles éclipe la seconde. Par exemple, si on prend l'étoile A comme référence, il y aura éclipse si la ligne de visée de l'observateur est dans le plan orbital du système binaire. On peut mesurer cette oscillation de la luminosité et donc détecter le seconde étoile d'un système binaire. Cette dernière configuration est illustrée à la figure 1.5.

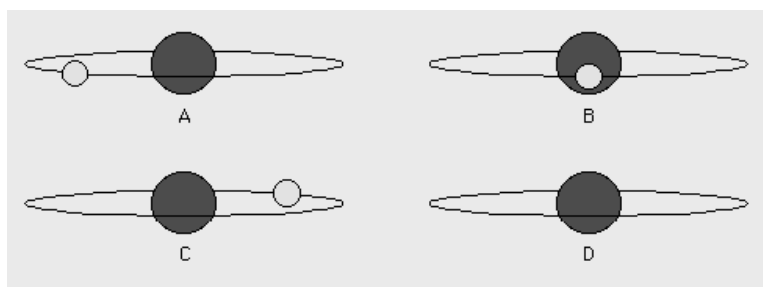


FIGURE 1.5 – Éclipses des deux composantes de la binaire, en B et D, figure issue de [2]

Il est possible qu'une paire d'étoiles appartienne simultanément à plusieurs catégories si elle est détectée de différentes façons.

1.5 Classification selon le lobe de Roche

On peut également distinguer les étoiles binaires en fonction des masses des deux étoiles (et de la distance qui sépare ces dernières).

Dans un système binaire, qu'il s'agisse de deux étoiles ou d'une étoile et d'une planète, on peut déterminer des points de Lagrange, qui sont des points particuliers pour le système. Si on se place dans un repère tournant avec la binaire, alors ces points sont stationnaires dans ce repère. Soulignons qu'en ces points, toutes les forces sont compensées (les forces gravitationnelles des deux étoiles compensent les forces centripètes). Le premier point de Lagrange est un point situé sur la ligne définie par les deux masses. Il est noté L_1 et est tel que si on place une masse faible en ce point, celle-ci ne sera pas attirée par l'un ou l'autre objet formant la binaire. D'autres points de Lagrange existent, notés de L_2 à L_5 . Les points L_2 et L_3 se trouvent également sur la droite reliant les deux corps, mais à

l'extérieur du système binaire. Les points de Lagrange L_4 et L_5 sont situés à 60° de la ligne rejoignant les deux corps, comme illustré à la figure 1.6.

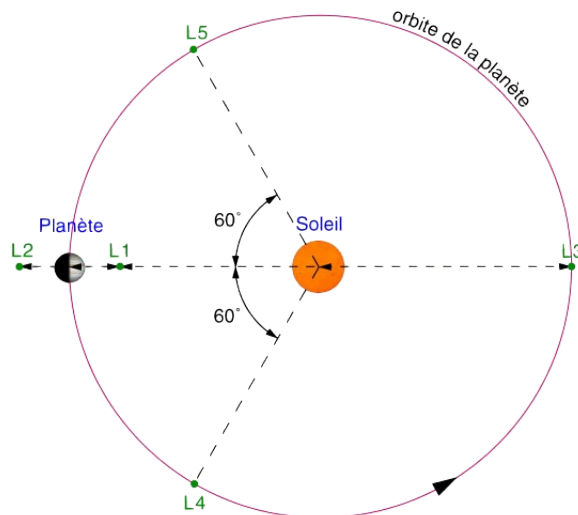


FIGURE 1.6 – Représentation des points de Lagrange dans un système étoile-planète, figure issue de [45]

L'ouvrage de Murray et Dermott [26] est une référence traitant en particulier des points de Lagrange.

Dans un système binaire, on peut distinguer deux surfaces particulières équipotentielles gravitationnellement qui ont, comme point de contact, le point de Lagrange L_1 . Chacun des deux corps possède une telle surface. Ces surfaces sont les *surfaces de Roche*. Le *lobe de Roche*⁴ du premier corps (respectivement du second corps) est la région enfermée par la surface de Roche du premier corps (respectivement du deuxième corps). Le lobe de Roche est ainsi une région autour d'une étoile d'un système binaire à l'intérieur de laquelle la matière est liée gravitationnellement à cette étoile uniquement. Si l'étoile dépasse son lobe de Roche alors la matière excédentaire peut s'échapper de l'attraction de l'étoile.

La figure 1.7 représente les différents points de Lagrange pour un système binaire. On peut y voir aussi une coupe des lobes de Roche. On peut classer les systèmes binaires en fonction du remplissage des lobes de Roche des deux étoiles. Nous décrivons trois catégories de système allant du système où aucun des lobes de Roche n'est rempli jusqu'au système où les deux étoiles remplissent leur lobe de Roche respectif.

4. Pour plus d'informations concernant le lobe de Roche, nous conseillons le site [18] et l'ouvrage de Murray et Dermott [26].

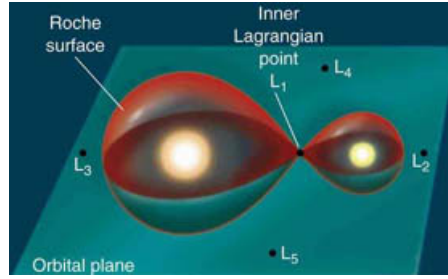


FIGURE 1.7 – Représentation des lobes de Roche des deux étoiles pour un système binaire, des surfaces de Roche et des 5 points de Lagrange, figure issue de [8]

1.5.1 Binaires détachées

Les *binaires détachées* sont les binaires dont les deux étoiles sont assez éloignées l'une de l'autre pour que les effets de marée soient insignifiants (voir section 1.6). Aussi, aucune des deux étoiles ne remplit son lobe de Roche. La plupart des binaires connues sont des binaires de ce type. Dans la suite de notre mémoire, c'est ce type de binaire que nous allons considérer.

La figure 1.8 représente une binaire détachée. Les deux étoiles sont bien distinctes et contenues entièrement dans leur lobe de Roche respectif.

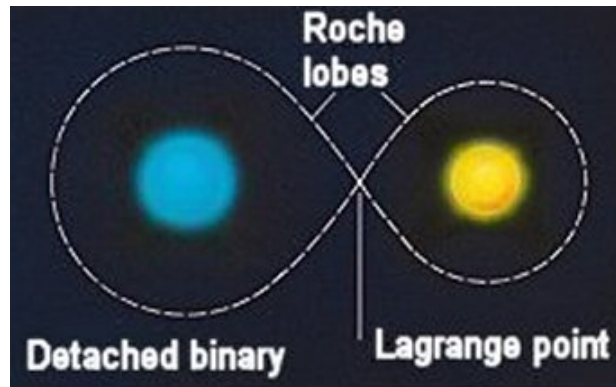


FIGURE 1.8 – Représentation schématique d'une binaire détachée, figure issue de [8]

1.5.2 Binaires semi-détachées

Les *binaires semi-détachées* sont les binaires dont une des deux étoiles remplit et déborde de son lobe de Roche. Il y a, dans ce cas, transfert de matière entre cette étoile et la deuxième. Un disque d'accrétion, disque de matière en rotation autour d'un objet céleste, se forme autour de la seconde étoile. Ce phénomène se produit lorsqu'une des deux étoiles est un objet compact et dense, tel qu'un trou noir, une naine blanche ou une étoile à neutrons et que l'autre étoile est une étoile « standard », à la fin de la séquence principale. En devenant une géante rouge, l'étoile remplit son lobe de Roche et donne peu à peu sa matière à l'étoile plus massive qui l'accompagne. La figure 1.9 illustre le

comportement d'une binaire semi-détachée. Les binaires X sont composées d'une étoile « standard » et d'un trou noir ou une étoile à neutrons et sont un bon exemple de binaire semi-détachée.

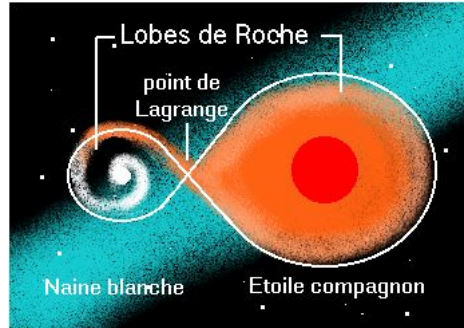


FIGURE 1.9 – Représentation schématique d'une binaire semi-détachée, figure issue de [29]

1.5.3 Binaires à contact

Les *binaires à contact* sont des binaires dont les deux étoiles remplissent chacune leur lobe de Roche. Dans ce cas, les deux étoiles ont une « enveloppe » commune. La figure 1.10 illustre ce type de binaire. Un exemple de binaire à contact est les étoiles à éclipses « Ursae Majoris » ([46]). Dans ce cas, la binaire est composée d'étoiles assez vieilles, principalement des naines blanches. Les deux étoiles ont des masses similaires. Ces étoiles sont très rapprochées ce qui implique une faible période, de l'ordre de la journée.

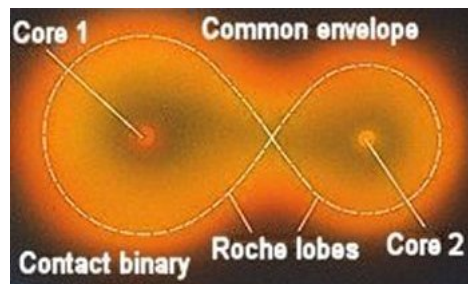


FIGURE 1.10 – Représentation schématique d'une binaire à contact, figure issue de [8]

1.6 Étoiles binaires abritant un compagnon planétaire

Récemment, on a découvert que certaines étoiles binaires abritent également un compagnon planétaire. Dans ce cas, on peut caractériser la planète en fonction de son orbite.

Une telle planète est appelée *exoplanète* (ou planète extrasolaire), *i.e.* une planète orbitant autour d'une autre étoile que le Soleil.

Il est possible que la planète orbite autour d'une des deux étoiles. On dit alors que la planète a une orbite « S-type ». Une deuxième possibilité est que le compagnon planétaire orbite autour de la binaire complète. Dans ce cas, l'orbite de l'exoplanète est dite de « P-type » (ou *circumbinary* en anglais). C'est ce dernier problème des trois corps que nous allons considérer dans ce travail.

La figure 1.11 représente à la fois une planète S-type et une planète P-type. Le barycentre est représenté par le point bleu. Les deux étoiles composant la binaire sont représentées par les points jaune et rouge.

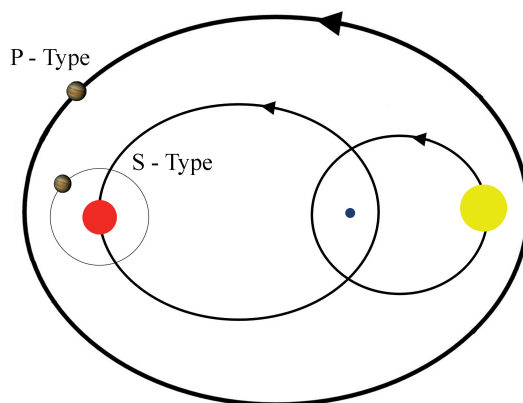


FIGURE 1.11 – Exoplanètes orbitant autour d'une des deux composantes (S-type) et autour de la binaire (P-type), figure issue de [47]

Ces trois corps sont également soumis à d'autres effets que la gravitation de Newton de par leur proximité et les masses importantes des deux étoiles, que nous décrivons dans la suite de cette section.

1.6.1 Les effets de marée

Les *effets de marée* sont liés à la force de gravitation. Dès que l'on ne réduit pas un corps à un point, la forme de celui-ci entre en jeu. En effet, la force de gravitation dépendant de la distance entre les corps n'est pas égale en tout point du corps. Ce sont ces différences dans la force de gravitation qui créent les effets de marée. Les conséquences sont une déformation des corps qui les subissent (moins le corps est rigide, plus il sera déformé), mais aussi des modifications des mouvements de rotation et révolution. Les effets de marée dépendent de la proximité entre les corps ainsi que de leur masse.

Dans le système Terre-Lune, la Lune attire la Terre de façon non uniforme. Le côté de la Terre exposé à la Lune est attiré plus fortement par celle-ci. L'eau à la surface du globe subit cette force : il se produit une marée. On note cependant que les couches inférieures subissent aussi les effets provoqués par la Lune. En effet, la Terre est composée d'un noyau plutôt rigide et d'une couche extérieure plutôt fluide. C'est donc cette dernière qui subit en particulier les déformations liées aux effets de marée. Cependant, le noyau n'étant pas totalement rigide, il subit lui aussi les effets de marée et est dès lors également déformé.

Dans le cas de la Terre, la couche extérieure est composée d'eau. Les marées maritimes sont les déformations de cette couche superficielle. La figure 1.12 représente les effets de marée produits par un corps jaune sur un corps rouge. Ce corps est déformé par la présence du plus petit corps.

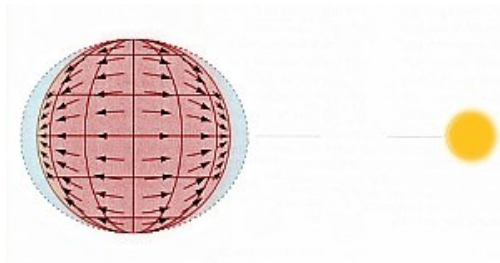


FIGURE 1.12 – Effets de marée subis par le premier corps (rouge) et produits par le deuxième corps (jaune), figure issue de [17]

Le Soleil provoque aussi des marées sur Terre mais la distance⁵ le séparant de notre planète étant plus importante, les marées sont plus faibles.

Si les forces de gravitation deviennent plus grandes que les forces de cohésion interne d'un corps, celui-ci peut se décomposer. La *limite de Roche* est la distance en dessous de laquelle les effets de marées sont trop grands et ne sont plus compensés par les forces de cohésion interne du corps. Il se disloque alors et les débris orbitent autour du corps primaire, formant un anneau autour de ce dernier. La limite de Roche dépend de la structure du corps. Plus d'informations sont disponibles sur le site de l'Observatoire de Paris [32] et dans l'ouvrage de Murray et Dermott [26].

La figure 1.13 représente l'évolution d'un satellite *A* qui s'approche de la limite de Roche d'une planète *B*. Lorsqu'il en est éloigné, les forces de cohésion l'emportent. Plus il se rapproche de cette distance critique, plus il est déformé. Lorsqu'il passe la limite de Roche, le corps se disloque jusqu'à former un anneau de débris en rotation autour du corps *B*. Les flèches rouges représentent le sens de la rotation des débris.

Dans le cas des systèmes binaires accompagnés d'une planète, Tous les corps subissent ces effets en fonction de leur proximité et de leur masse (cf. Chapitre 4). Dans la configuration « P-type », la planète subit les effets de marée mais dans une moindre mesure en raison de la plus grande distance entre la planète et la binaire. Pour une orbite « S-type », il se peut que la planète subisse fortement ces effets, en fonction de sa proximité à son étoile hôte.

1.6.2 La relativité

La *relativité*⁶ est la succession de deux théories. La première, datant de 1905, est la théorie de la *relativité restreinte*. Elle a été proposée principalement par Albert Einstein. Ce dernier l'améliora jusqu'en 1915, pour aboutir à la théorie de la *relativité générale*.

5. La distance moyenne entre la Terre et le Soleil est une unité astronomique, qui correspond à $1.4959978707 \cdot 10^{11}$ m.

6. La majorité des explications de cette section provient du cours de Gravitation relativiste et cosmologie et donné par [15]. D'autres informations peuvent être trouvées sur [36].

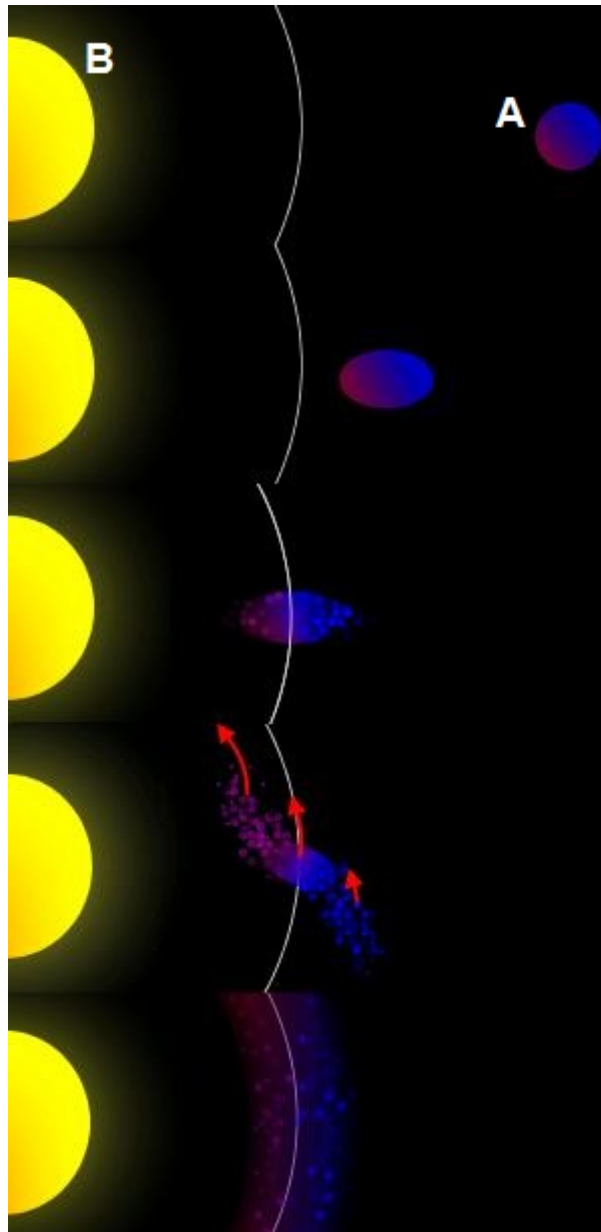


FIGURE 1.13 – La limite de Roche est représentée par la courbe blanche. Le corps A subit les effets de marée produits par le corps B, figure issue de [50]

La relativité restreinte

La relativité restreinte repose sur plusieurs principes.

Le premier est le principe de relativité, déjà introduit par Galilée. Il signifie que toutes les lois physiques sont équivalentes dans tout *référentiel inertiel*. Un référentiel inertiel est un référentiel relié à un corps libre qui a une vitesse rectiligne uniforme. Un référentiel non inertiel est un référentiel accéléré par rapport à un référentiel inertiel.

Le deuxième principe est le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. Nous rappelons que la vitesse de la lumière (c) est $299\,792\,458\,m/s$. Cette vitesse est indépassable. L'invariance de c a pour conséquence qu'à la fois les longueurs et les

durées deviennent des notions relatives. Elles dépendent notamment de la vitesse qu'a l'observateur.

De plus, la relativité restreinte impose qu'il y ait contraction des longueurs et dilatation du temps, lorsque la vitesse relative entre deux corps est grande. Toute horloge en mouvement est ralentie tandis que la longueur d'un corps en mouvement est contractée. Cette longueur rétrécit uniquement dans la direction du mouvement, les autres directions n'étant pas modifiées.

Aussi, la relativité restreinte voit disparaître le *temps absolu* : il n'est pas possible de garder synchronisées deux horloges qui se trouvent dans deux référentiels inertiels différents.

Notons que c'est avec cette théorie qu'est apparue la fameuse équation $E = mc^2$. Elle permet de remplacer la masse d'un corps par son énergie.

Pour conclure l'explication de la théorie de la relativité restreinte, nous introduisons un nouveau concept : l'espace-temps. L'invariance de la vitesse de la lumière impose que l'espace et le temps ne forment plus deux entités séparées. Ensemble, ils forment un espace à 4 composantes, une pour représenter le temps et trois pour l'espace. L'espace-temps de la relativité restreinte est l'espace de Minkowski. C'est un espace plat ou pseudo-euclidien.

La relativité générale

La relativité générale est une généralisation de la relativité restreinte. Einstein a introduit cette théorie car la gravitation n'est pas compatible avec la relativité restreinte. En effet, la gravitation est une force qui s'applique à distance. Pour conserver l'invariance de la vitesse de la lumière et le fait qu'elle est indépassable, il a dû modifier sa théorie. La gravitation devient alors une propriété géométrique de l'espace-temps. C'est la courbure de ce dernier. L'espace-temps de la relativité générale n'est pas plat. Les masses le déforment localement.

Les *géodésiques* sont les plus courts chemins empruntés par toute particule libre et de masse très faible. En relativité générale, elles ne sont plus des lignes droites comme dans le cas des espaces plats, en raison de la courbure de l'espace-temps. La figure 1.14 illustre la déformation de l'espace-temps localement. Les géodésiques y sont aussi tracées.

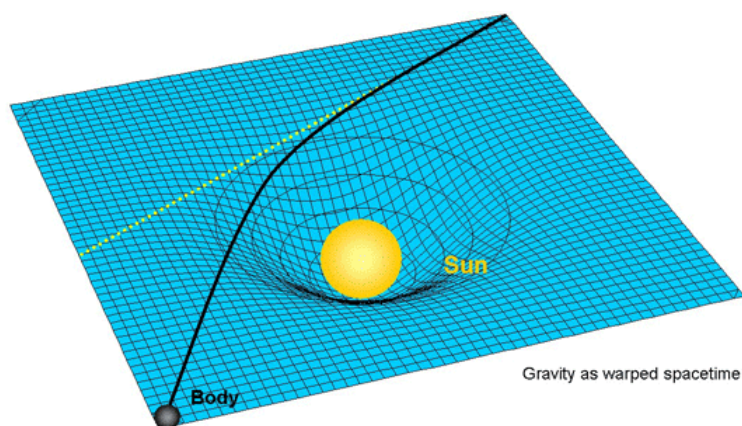


FIGURE 1.14 – Déformation locale de l'espace-temps de la relativité générale due à la présence d'un corps massif, figure issue de [39]

La lumière est aussi déviée en présence de masses importantes. Si un corps massif se situe entre l'observateur et la source lumineuse, alors les rayons lumineux provenant de cette source seront déviés par le corps massif. Cette déviation de la lumière a pour conséquence que les positions apparentes des étoiles ne sont pas leurs positions réelles. La figure 1.15 illustre ce phénomène et la déviation des ondes lumineuses. Le corps massif qui dévie la lumière est une lentille gravitationnelle.

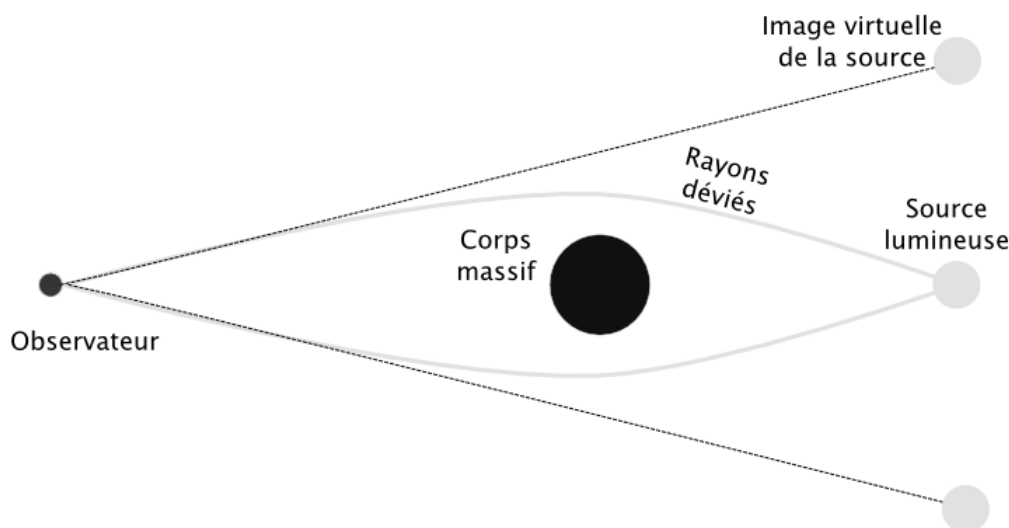


FIGURE 1.15 – Effet d’une lentille gravitationnelle entre l’observateur à gauche et la source lumineuse à droite, figure issue de [42]

Aussi, le principe de relativité devient le principe de covariance qui stipule que les lois physiques s’expriment de la même manière dans tous les référentiels, y compris les référentiels non-inertiels, c’est-à-dire les référentiels accélérés. Il est indispensable de définir les vitesses, accélérations, ... par rapport à un référentiel.

Le deuxième principe de la relativité générale est le principe d’équivalence. On peut l’énoncer de la façon suivante : localement, on ne peut pas distinguer un champ de gravitation d’un champ d’accélération.

Dans notre système solaire, Mercure est la planète qui subit le plus les effets relativistes du Soleil.

A nouveau, il s’agira de prendre en compte dans cette étude les effets relativistes entre les planètes d’une binaire ou exercés sur tout compagnon planétaire du système.

Chapitre 2

Le problème des trois corps

Ce chapitre est consacré à rappeler brièvement ce qu'est le problème newtonien des trois corps auquel nous ajouterons par la suite les effets relativistes et les effets de marée. Pour ce faire, nous synthétisons ici les développements et les résultats obtenus par Florence Auquier dans son mémoire [1] et nous nous référons à son travail pour les détails de calculs¹. Celui-ci est consacré à un développement de l'Hamiltonien lié au problème des trois corps dans le cas de deux étoiles et d'un compagnon planétaire, bien que le développement soit identique pour trois masses quelconques. La première section de ce chapitre a pour objectif de décrire la dynamique séculaire du problème des trois corps appliqué aux systèmes binaires, les corps étant considérés comme des masses ponctuelles en interaction gravitationnelle.

Dans la seconde section, nous énonçons la forme générale de l'Hamiltonien avec corrections relativistes et masses non ponctuelles considérée dans Migaszewski et Goździewski [24], article de référence de notre travail.

2.1 Hamiltonien du problème des trois corps

Cette première section traite de la dynamique séculaire du problème des trois corps. Nous y rappelons aussi les différents éléments képlériens ainsi que les variables canoniques de Delaunay. Nous donnons enfin l'Hamiltonien du problème des trois corps. Cet Hamiltonien comprend uniquement les interactions newtoniennes entre les différents corps.

2.1.1 Introduction à la dynamique du problème

On considère trois corps en interaction gravitationnelle, par exemple, un système binaire autour duquel orbite une exoplanète. Dans un repère quelconque, ce système à trois corps possède 9 degrés de liberté.

Pour réduire ce nombre à 6, on procède à une réduction du centre de masse, en choisissant par exemple les coordonnées de Jacobi. Ces coordonnées sont illustrées à la figure 2.1.

1. Florence Auquier travaille en coordonnées de Jacobi (comme dans l'article de Ford et al. [13]), ce qui n'est pas notre cas. Nous nous basons donc sur son travail pour la compréhension de la formulation hamiltonienne tout en reprenant les expressions en coordonnées héliocentriques développées en détail dans l'article de Libert et Delsate [21].

Elles consistent à repérer chaque corps M_i en fonction du barycentre des corps précédents M_0, M_1, \dots, M_{i-1} .

Décrivons en détail le repère du système binaire qui nous préoccupe. L'étoile primaire a une masse m_0 , la deuxième étoile une masse m_1 et le compagnon planétaire ou stellaire une masse m_2 .

Les deux étoiles orbitent et définissent un plan orbital Π_1 . Les coordonnées de Jacobi de ce système sont les suivantes : \vec{r}_1 est le vecteur position de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 et \vec{r}_2 est la position du troisième corps, m_2 , par rapport au centre de masse de m_0 et m_1 .

L'angle entre ces deux vecteurs est noté Φ . Le plan orbital de m_2 autour du centre de masse est noté Π_2 . L'angle entre les plans orbitaux Π_1 et Π_2 est, quant à lui, noté i . L'ellipse décrite par m_1 autour de m_0 est caractérisée par un demi-grand axe a_1 et une excentricité e_1 . De même, la deuxième orbite, celle de m_2 autour du centre de masse de m_0 et m_1 , est caractérisée par un demi-grand axe a_2 et une excentricité e_2 .

Les autres éléments képlériens sont rappelés à la figure 2.2.

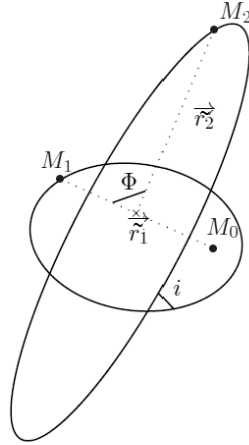


FIGURE 2.1 – Illustration du problème des trois corps étudié, figure issue de [1]

Florence Auquier a travaillé sur la *théorie octupole*, c'est-à-dire le développement de l'Hamiltonien du problème des trois corps à l'ordre trois par rapport à $\frac{a_1}{a_2}$, le rapport des demi-grands axes des deux orbites, selon l'article de référence Ford et al. [13].

L'Hamiltonien, développé en fonction du rapport des demi-grands axes α et que l'on va par la suite tronquer à l'ordre trois ($j = 3$), est donné par l'équation suivante :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{k^2 m_0 m_1}{2a_1} + \frac{k^2 (m_0 + m_1) m_2}{2a_2} + \frac{k^2}{a_2} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha^j \mathcal{M}_j \left(\frac{r_1}{a_1} \right)^j \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^{j+1} P_j(\cos \Phi), \quad (2.1)$$

où

- k est la constante gravitationnelle de Gauss²,
- P_j sont les polynômes de Legendre,
- $\mathcal{M}_j = m_0 m_1 m_2 \frac{m_0^{j-1} - (-m_1)^{j-1}}{(m_0 + m_1)^j}$,
- $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$.

Ce développement est valable uniquement sous l'hypothèse d'un système *hiérarchique*. Un tel système est un système pour lequel $\frac{a_1}{a_2} \ll 1$.

2.1.2 Éléments képlériens et éléments de Delaunay

La figure 2.2 illustre les éléments képlériens $(a, e, i, \omega, \Omega, \nu)$ qui permettent de décrire les propriétés géométriques de l'ellipse parcourue par la planète ainsi que la position initiale de cette dernière sur l'ellipse. Il est à noter que, dans la suite, l'anomalie vraie (ν dans la figure 2.2) sera notée f .

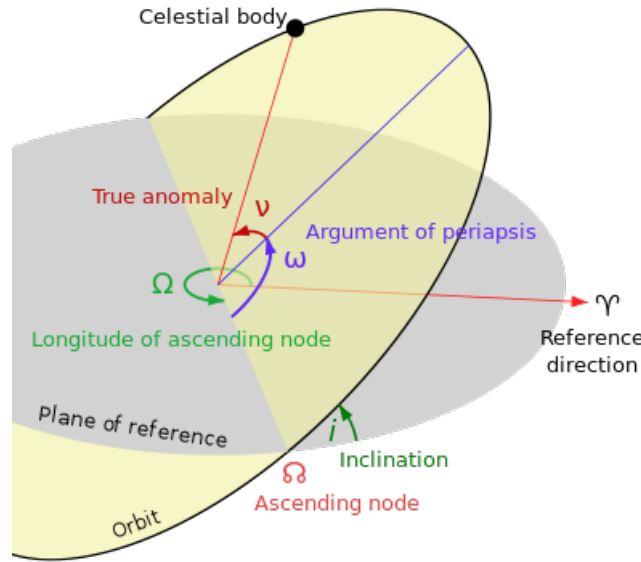


FIGURE 2.2 – Les éléments képlériens (i, ω, Ω, ν) , figure issue de [48]. Le plan de référence est représenté en gris alors que le plan de l'orbite est, lui, jaune. ω est l'argument du périastre, l'anomalie vraie est notée ν , la longitude du noeud ascendant est notée Ω .

Dans la suite de ce travail, nous choisissons de travailler en coordonnées héliocentriques canoniques³. De plus, à la place des éléments képlériens décrits ci-dessus, nous aurons recours aux variables canoniques appelées éléments de Delaunay dont les variables angulaires sont

$$\begin{aligned} l_1, l_2 &= M_1, M_2, \text{ les anomalies moyennes }^4, \\ g_1, g_2 &= \omega_1, \omega_2, \text{ les arguments du périastre,} \\ h_1, h_2 &= \Omega_1, \Omega_2, \text{ les longitudes des noeuds ascendants,} \end{aligned}$$

2. Florence Auquier utilise la constante \mathcal{G} dans son mémoire. On note que $\mathcal{G} = k^2$.

3. Pour obtenir des variables héliocentriques canoniques (\vec{r}_i) à partir de variables barycentriques (\vec{u}_i) , il suffit de choisir $\vec{r}_0 = \vec{u}_0$ et $\vec{r}_i = \vec{u}_i - \vec{u}_0$. Le fait que ces variables soient canoniques provient du choix $\vec{r}_0 = \vec{u}_0$.

et les moments associés sont

$$L_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) a_1}, \quad (2.2)$$

$$L_2 = \frac{m_2 m_0}{m_0 + m_1 + m_2} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1 + m_2) a_2}, \quad (2.3)$$

$$G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2}, \quad (2.4)$$

$$G_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2}, \quad (2.5)$$

$$H_1 = G_1 \cos i_1, \quad (2.6)$$

$$H_2 = G_2 \cos i_2, \quad (2.7)$$

où les éléments képlériens sont associés aux coordonnées héliocentriques canoniques.

2.1.3 Hamiltonien séculaire du problème des trois corps sans corrections

Afin d'obtenir le développement octupole, on tronque la série (2.1) à l'ordre trois. Ensuite, nous moyennons cette série tronquée par rapport aux anomalies moyennes l_1 et l_2 , car nous nous intéressons à la dynamique séculaire (*i.e.* à long terme) du système des trois corps. Cette moyennisation peut être réalisée pour les systèmes qui ne sont pas en résonance en moyen mouvement, comme c'est le cas pour les systèmes que nous considérons dans ce travail. Un rappel concernant la moyennisation est fait dans la section 2.2. Enfin, nous appliquons l'invariance du moment angulaire total pour réduire encore le nombre de degrés de liberté. Ceci permet de réduire le problème à deux degrés de liberté : g_1 et g_2 (et les moments associés G_1 et G_2).

In fine, nous obtenons l'Hamiltonien $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}}(G_1, G_2, g_1, g_2) \rangle$ suivant :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle = & -\alpha^2 \frac{k^2 m_1 m_2 L_2^3}{16 a_2 G_2^3} \left[\left(2 + 3 \left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2} \right) \right) (3 \cos^2 i - 1) + 15 \left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2} \right) \sin^2 i \cos(2g_1) \right] \\ & + \alpha^3 \frac{15 k^2 m_1 m_2 L_2^5}{64 a_2 G_2^5} \sqrt{1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}} \sqrt{1 - \frac{G_2^2}{L_2^2}} \left[A \cos \phi + 10 \frac{G_1^2}{L_1^2} \cos i \sin^2 i \sin g_1 \sin g_2 \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $\alpha = \frac{a_1}{a_2},$

$$A = 7 - 3 \frac{G_1^2}{L_1^2} - \frac{5}{2} \sin^2 i B,$$

$$B = 7 - 5 \frac{G_1^2}{L_1^2} - 7 \left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2} \right) \cos(2g_1),$$

$$\cos \phi = -\cos g_1 \cos g_2 - \cos i \sin g_1 \sin g_2,$$

$$i = i_1 + i_2,$$

où i représente l'inclinaison mutuelle entre les plans orbitaux de m_1 et m_2 . Cette expression de $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle$ en coordonnées héliocentriques est issue de l'article de Libert et Delsate [21] et est équivalente à celle utilisée dans le mémoire de Florence Auquier, à l'exception du jeu de coordonnées.

Le symbole $\langle \cdot \rangle$ indique que l'Hamiltonien a été moyenné par rapport aux courtes périodes. L_1, L_2 sont des constantes de cet Hamiltonien car nous avons moyenné par rapport aux anomalies moyennes. Ceci implique que les demi-grands axes a_1 et a_2 sont également constants, au vu des définitions (2.2) et (2.3) de L_1 et L_2 respectivement.

L'évolution du système est donnée par les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned}\frac{dg_i}{dt} &= \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial G_i}, \\ \frac{dG_i}{dt} &= -\frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial g_i},\end{aligned}$$

$i = 1, 2$.

Ces équations nous permettent d'étudier l'évolution des excentricités (e_1 et e_2) et des arguments des périastres (g_1 et g_2). Pour ce faire, nous faisons l'étude des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{de_i}{dt} &= \frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{dG_i}{dt} = -\frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial g_i}, \\ \frac{dg_i}{dt} &= \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial G_i}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

2.2 Hamiltonien avec corrections

Dans ce travail, nous allons apporter deux corrections au problème des trois corps considéré ci-dessus. La première correction va être de tenir compte des effets relativistes entre les deux étoiles composant le système binaire et le compagnon planétaire ou stellaire du système. La deuxième correction est la correction due aux masses non ponctuelles. Nous la scindons en deux influences. Tout d'abord, l'effet *tidal bulge*, qui peut être traduit par *bourrelet de marée*, est l'effet de marée comme nous l'avons expliqué dans la section 1.6.1 : les corps sont déformés du fait de la présence d'autres corps. Le deuxième effet est celui du *spin* : lorsque les corps ont une grande vitesse de rotation, ces derniers sont déformés et s'aplatissent. Ces deux effets sont conservatifs. Les effets dissipatifs feront l'objet du dernier chapitre de ce travail.

L'article de référence pour l'étude de ces différentes corrections est Migaszewski et Gozdziewski [24].

Nous pouvons décrire le mouvement du problème des trois corps avec corrections grâce à une somme des différentes composantes hamiltoniennes nécessaires pour décrire la mécanique d'un tel système.

Les auteurs Migaszewski et Gozdziwski décomposent l'Hamiltonien de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} + \mathcal{H}_{\text{GR}} + \mathcal{H}_{\text{spin}} + \mathcal{H}_{\text{TB}} \\ \text{où } \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} &\text{ est l'Hamiltonien limité à l'octupole,} \\ \mathcal{H}_{\text{GR}} &\text{ est l'Hamiltonien représentant les corrections relativistes,} \\ \mathcal{H}_{\text{spin}} &\text{ est l'Hamiltonien décrivant l'effet de spin,} \\ \mathcal{H}_{\text{TB}} &\text{ est l'Hamiltonien décrivant les bourrelets de marée.}\end{aligned}$$

Remarquons que cet Hamiltonien est étudié par Migaszewski et Gozdziwski [24] pour un système formé d'une étoile et deux planètes, l'objectif étant ici d'appliquer ce travail aux systèmes binaires accompagnés d'un compagnon planétaire ou stellaire. L'Hamiltonien \mathcal{H}_{GR} comprend les corrections relativistes liées à la relativité générale, son étude sera faite au Chapitre 3. L'Hamiltonien $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ modélisera l'aplatissement de l'étoile en rotation. Cet Hamiltonien ainsi que celui qui décrit le bourrelet de marée \mathcal{H}_{TB} seront étudiés au Chapitre 4.

Pour éviter toute confusion, établissons les notations utilisées tout au long de ce travail. Certaines ont déjà été citées dans les paragraphes précédents. Rappelons que nous travaillons dans un système composé de trois corps : m_0 , m_1 et m_2 . La seule contrainte que nous imposons au système est $a_1 \ll a_2$. Nous n'imposons pas de contraintes concernant les trois masses, c'est pourquoi quatre configurations sont réalisables :

- un système binaire S-type : étoile-planète-étoile,
- un système binaire P-type : étoile-étoile-planète,
- une étoile et deux planètes,
- trois étoiles.

Migaszewski et Gozdziwski [24] positionnent la masse m_0 au centre du repère héliocentrique. Le vecteur \vec{r}_1 est le vecteur position de m_1 par rapport à m_0 tandis que le vecteur \vec{r}_2 est le vecteur position de m_2 par rapport à m_0 .

Nous allons, comme Florence Auquier, travailler sur la dynamique séculaire du problème. Une fois \mathcal{H} obtenu, nous le moyennerons par rapport aux anomalies moyennes. La formule utilisée pour moyenner un Hamiltonien \mathcal{H} par rapport à l'anomalie moyenne M_i ($i = 1, 2$) est la suivante :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} \, dM_i.$$

Si nous regardons le mouvement de la masse m_i ($i = 1, 2$) par rapport à m_0 , alors la distance entre m_0 et m_i est donnée par

$$r_i = \frac{a_i(1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos f_i}. \quad (2.9)$$

Par souci de clarté, nous décidons d'omettre l'indice i dans les calculs de cette section. Toutes les expressions pourront ensuite être appliquées aux masses m_1 et m_2 .

Il est souvent plus aisé d'intégrer par rapport à l'anomalie vraie, car celle-ci apparaît dans

l'expression de r (équation (2.9)).

L'intégrale moyennée est dans ce cas donnée par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{H} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} \, dM \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} \mathcal{J} \, df,\end{aligned}\tag{2.10}$$

où $\mathcal{J} = \frac{dM}{df}$ est un changement de variables de M vers f . Nous calculons à l'Annexe A l'expression de ce changement \mathcal{J} , de sorte que $\langle \mathcal{H} \rangle$ se réécrit :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos f)^2} \, df.$$

Ainsi, nous pourrions formuler l'Hamiltonien moyenné sur les anomalies moyennes :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle.\tag{2.11}$$

Après avoir obtenu une expression pour chaque terme de (2.11), nous exprimerons l'Hamiltonien moyenné dans les variables de Delaunay modifiées décrites ci-dessous. Les éléments modifiés de Delaunay que nous utilisons dans notre mémoire sont les variables utilisées par Migaszewski et Gozdziwski [24] :

$$\begin{aligned}l_i &= M_i & L_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i a_i} \\ g_i &= \varpi_i = \omega_i + \Omega_i & G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} \\ h_i &= \Omega_i & H_i &= G_i (\cos I_i - 1), \, i = 1, 2,\end{aligned}$$

où

- $\mu_i = k^2(m_0 + m_i)$ est le paramètre de masse,
- $\beta_i = (\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0})^{-1} = \frac{m_i m_0}{m_i + m_0}$ est la masse réduite,
- ω_i est l'argument du périastre,
- ϖ_i est la longitude du périastre,
- Ω_i est la longitude du noeud ascendant,
- I_i est l'inclinaison.

Ces variables sont obtenues après une transformation canonique des éléments de Delaunay décrits à la section 2.1.2⁵.

5. Notons que habituellement, les éléments de Delaunay modifiés sont définis par

$$\begin{aligned}l_i &= M_i + \omega_i + \Omega_i, & L_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ g_i &= -\varpi_i = -\omega_i - \Omega_i, & G_i &= L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2}), \\ h_i &= -\Omega_i, & H_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} (\cos I_i - 1), \, i = 1, 2.\end{aligned}$$

Plus d'information sur ces variables peut être trouvée dans [19].

Chapitre 3

Les corrections relativistes

Le but de ce chapitre est d'étudier l'expression hamiltonienne des corrections relativistes. Concrètement, nous allons calculer le Lagrangien du problème des deux corps à l'aide du principe variationnel, mais non pas appliqué à la métrique habituelle mais à l'intervalle ds de l'espace-temps courbe de la relativité générale. Ainsi, le Lagrangien dépend de c , la vitesse de la lumière. La vitesse de la lumière apparaîtra donc aussi dans l'Hamiltonien qui en découle. L'Hamiltonien de ce problème des deux corps comprend ainsi une partie newtonienne et une partie post-newtonienne, les corrections relativistes. Les développements exposés dans ce chapitre ont été réalisés sur base de l'article de Richardson et Kelly [40].

3.1 Mise en contexte

Dans ce travail, nous ne considérons que les corrections relativistes entre les deux corps les plus proches, m_0 et m_1 . En effet, par hypothèse, $a_1 \ll a_2$ et les corrections relativistes pour m_2 sont donc faibles.

Dans un premier temps, nous travaillons avec un centre, noté O , de repère quelconque, à quatre dimensions (une dimension temporelle et trois dimensions spatiales).

Dans ce repère, la masse m_0 est repérée par le vecteur $\vec{r}_0^* = \{x_0^i\}_{i=0}^3$. La masse m_1 est repérée par le vecteur $\vec{r}_1^* = \{x_1^i\}_{i=0}^3$. La position de la masse m_1 relativement à la masse m_0 est le vecteur

$$\vec{r} = \vec{r}_1^* - \vec{r}_0^* = \{y^i\}_{i=0}^3.$$

Ce vecteur est de norme r . La figure 3.1 représente ces vecteurs.

La définition de l'*intervalle élémentaire* ds de l'espace-temps de la relativité générale a été enseignée dans le cours de Gravitation relativiste et cosmologie [15]. Nous la rappelons ci-dessous :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

où $\mu, \nu = 0 : 3$.

Nous utilisons la *convention de sommation d'Einstein*. D'après cette convention, toute somme devient implicite dès qu'un indice est répété deux fois dans une expression. L'indice est alors dit *indice muet*. Notons qu'il n'y aura une somme implicite que si l'indice est répété une fois en indice covariant (en bas d'un vecteur ou d'un tenseur) et une fois en

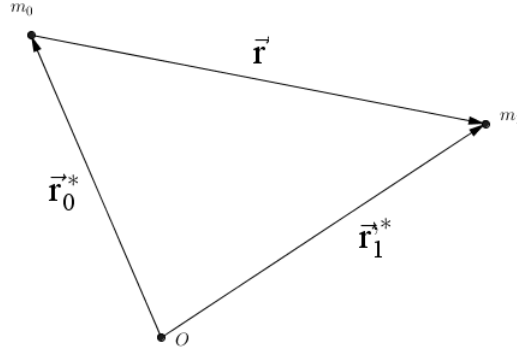


FIGURE 3.1 – Représentation de m_0 et m_1 , du centre de repère O et des vecteurs position \vec{r}_0^* , \vec{r}_1^* et \vec{r}

indice contravariant (en haut d'un vecteur ou d'un tenseur). Dans l'expression (3.2), elle est ainsi appliquée deux fois :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.2)$$

Le *tenseur métrique* utilisé est défini par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Ce tenseur de Riemann est symétrique : $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

La *métrique de Minkowski*, $\eta_{\mu\nu}$, est définie¹ par

$$\eta_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette métrique correspond à la métrique de la relativité restreinte. La métrique riemannienne $g_{\mu\nu}$ est donc définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} g_{00} &= 1 + h_{00}, \\ g_{0i} &= h_{0i}, & i = 1 : 3 \\ g_{ij} &= -\delta_{ij} + h_{ij}, & i = 1 : 3, j = 0 : 3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Les termes $h_{\mu\nu}$ représentent une correction par rapport à la métrique de Minkowski, de façon à tenir compte de la courbure de l'espace-temps de la relativité générale. Ces $h_{\mu\nu}$

1. Nous utiliserons par convention la signature $(+,-,-,-)$, utilisée dans l'article de Richardson et Kelly [40].

sont des développements en puissance de $\frac{1}{c}$.

Le terme δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Il vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.

Nous définissons la coordonnée temporelle de tout vecteur \vec{v} par $v^0 = ct$. Les coordonnées spatiales sont quant à elles représentées par v^1 , v^2 et v^3 . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v^\mu e_\mu \text{ en indice controvariant,} \\ &= (v^\mu) e_\mu = (\eta_{\mu\nu} v^\nu) e_\mu \text{ en indice covariant.}\end{aligned}$$

3.2 Lagrangien du problème des deux corps

Lorsque deux corps orbitent autour d'un centre de masse commun, chacun des deux corps est perturbé par le champ gravitationnel de l'autre corps.

Richardson et Kelly [40] développent le Lagrangien de ce problème en une somme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{PN}$ dont le premier terme est dû au formalisme de Newton et le deuxième représente le formalisme post-newtonien de la théorie générale de gravitation. En particulier, ils étudient l'approximation post-newtonienne (développement perturbatif en puissance de $1/c$), limitée à l'ordre $1/c^2$.

Pour ce faire, les auteurs utilisent le *principe de moindre action* pour déduire le Lagrangien. Cette notion de principe variationnel d'Hamilton est décrite dans le cours de Géométrie symplectique [4].

Théorème 3.2.1. *Le mouvement naturel est caractérisé par la propriété de rendre stationnaire l'Action Hamiltonienne :*

$$A(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$

dans la classe des mouvements variés synchrones qui préservent les configurations initiales et finales.

En d'autres termes, résoudre

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0,$$

nous permet d'identifier le Lagrangien $\mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$ du mouvement naturel.

Les variables que nous utilisons dans ce chapitre sont $\vec{q}(t) = (\vec{r}_0^*(t), \vec{r}_1^*(t))$ et $\dot{\vec{q}}(t) = (\dot{\vec{r}}_0^*(t), \dot{\vec{r}}_1^*(t))$.

Nous allons tout d'abord exprimer le Lagrangien \mathcal{L}_1 lié au mouvement d'une particule test² de masse m_{test_1} se trouvant dans le champ gravitationnel de la masse m_0 .

Le Lagrangien \mathcal{L}_1 est relié au Lagrangien \mathcal{L} total du système via la relation :

$$\mathcal{L}_1 = \lim_{m_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{L}}{m_1} \right). \quad (3.5)$$

2. Une particule test est un corps de masse assez faible pour ne pas influencer les trajectoires des corps se trouvant à proximité de cette dernière. Les trajectoires de telles particules sont les géodésiques de l'espace-temps.

Partons du principe variationnel exprimé par Richardson et Kelly [40] sous la forme

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} ds = 0, \quad (3.6)$$

où $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, $\mu, \nu = 0 : 3$.

De façon à pouvoir identifier \mathcal{L}_1 , nous allons exprimer le membre de gauche de l'égalité (3.6) par rapport au temps.

Pour exprimer (3.6) en fonction du temps, on paramétrise ds par rapport au temps en utilisant l'artifice

$$ds = \frac{ds}{dx^0} dx^0.$$

Ainsi, nous avons fait apparaître dt car $dx^0 = c dt$. Il suffit alors d'utiliser la définition de l'intervalle (3.1) et $dx^0 = c dt$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx^0} &= \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}} \\ &= \sqrt{g_{00} + 2 \frac{g_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par la convention de sommation d'Einstein, l'expression (3.7) contient plusieurs sommes sur les indices i et j , $i = 1 : 3$ et $j = 1 : 3$.

En remplaçant (3.7) dans l'égalité (3.6), nous avons alors

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{00} + 2 \frac{g_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} c dt = 0.$$

Nous avons ainsi trouvé l'expression de l'Action Hamiltonienne sous forme d'une intégrale par rapport au temps. Nous pouvons en déduire le Lagrangien \mathcal{L}_1 :

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{g_{00} + 2 \frac{g_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}. \quad (3.8)$$

Il suffit maintenant de remplacer g_{00} , g_{0i} et g_{ij} par les expressions données par (3.4). Nous substituons les expressions des $h_{\mu\nu}$ par les développements donnés par Richardson et Kelly [40] :

$$\begin{cases} h_{00} &= -\frac{1}{c^2} \frac{2k^2 m_0}{r} + \frac{1}{c^4} \left\{ 2 \left(\frac{k^2 m_0}{r} \right)^2 - \frac{3k^2 m_0 (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)}{r} \right\} + \dots, \\ h_{0i} &= \frac{1}{c^3} \left\{ \frac{7k^2 m_0 \dot{x}_0^i}{2r} + \frac{k^2 m_0 (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r}) y^i}{2r^3} \right\} + \dots, \\ h_{ij} &= -\frac{1}{c^2} \frac{2\delta_{ij} k^2 m_0}{r} + \dots, \end{cases}$$

où $1 \leq i, j \leq 3$.

Nous ne gardons que les termes d'ordre maximum $\frac{1}{c^2}$. Nous remarquons que les $h_{\mu\nu}$ dépendent du problème considéré : ils dépendent de la masse m_0 . Rappelons que nous sommes dans le cas où une particule test m_{test1} est perturbée par le champ gravitationnel de m_0 .

Après un développement de Taylor³ de l'expression (3.8), nous obtenons une nouvelle expression pour \mathcal{L}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2 m_0}{r} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} (\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 m_0}{r} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3k^2 m_0}{2r} (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*) - \frac{7k^2 m_0}{2r} \dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{k^2 m_0}{2r^3} (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right). \end{aligned}$$

Pour plus de clarté, rappelons les définitions des vecteurs position et vitesse utilisés dans l'écriture de ce Lagrangien :

- \vec{r}_0^* (\vec{r}_1^*) est le vecteur position de la masse m_0 (m_1) par rapport au centre du repère O ,
- $\dot{\vec{r}}_0^*$ ($\dot{\vec{r}}_1^*$) est le vecteur vitesse de la masse m_0 (m_1) par rapport au centre du repère O ,
- \vec{r} est le vecteur position de m_1 par rapport à m_0 ,
- r est la distance entre m_0 et m_1 ,
- $\dot{\vec{r}}$ est la vitesse de m_1 par rapport à m_0 .

La démarche que nous venons d'effectuer peut être appliquée, de la même manière, à une particule test m_{test_0} perturbée cette fois par le champ gravitationnel de m_1 . Dans ce cas, le Lagrangien obtenu est \mathcal{L}_0 . Il est obtenu en échangeant simplement dans l'expression de \mathcal{L}_1 les indices 0 et 1.

Pour obtenir le Lagrangien total \mathcal{L} , Richardson et Kelly [40] combinent l'effet d'une particule dans le champ de gravitation du corps m_0 et celui d'une particule se trouvant dans le champ gravitationnel du corps m_1 . Ils insistent sur le fait que le Lagrangien total n'est pas la somme des deux Lagrangiens isolés \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_0 . En effet, l'expression de \mathcal{L} doit être symétrique par rapport aux deux corps (e.g. invariante par la transformation $m_0 \vec{r}_0^* \leftrightarrow m_1 \vec{r}_1^*$). De plus, l'expression (3.5) et son équivalent pour \mathcal{L}_0 doivent être vérifiés. Le Lagrangien total est ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} m_0 \dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2 m_0 m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \left(m_0 (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)^2 + m_1 (\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)^2 \right) \quad (3.9) \\ & + \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left(3(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*) - 7\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2} (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{k^2}{r} (m_0 + m_1) \right). \end{aligned}$$

Ce Lagrangien est la somme d'une composante lagrangienne newtonienne et d'une composante lagrangienne post-newtonienne. Nous pouvons identifier ces deux dernières :

3. Il suffit en effet d'effectuer un développement de Taylor de la fonction $f(x) = (1+x)^{1/2}$ autour de $x = 0$.

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{2}m_0\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2m_0m_1}{r}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PN} = & \frac{1}{8c^2} \left(m_0(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)^2 + m_1(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)^2 \right) \\ & + \frac{k^2m_0m_1}{2rc^2} \left(3(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*) - 7\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2}(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Remarquons qu'à la limite $c \rightarrow +\infty$, le Lagrangien se réduit au Lagrangien newtonien. Nous ne nous intéressons ici qu'à la composante \mathcal{L}_{PN} du Lagrangien car la dynamique du problème des trois corps sans correction relativiste a déjà été explicitée dans le Chapitre 2.

Les équations lagrangiennes associées à (3.10) et (3.11) correspondent aux équations du mouvement obtenues initialement par Einstein, Infeld et Hoffmann [9]. Nous écrivons à présent ces équations de Lagrange ($i = 0, 1$) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i^*} = 0.$$

Or, les vecteurs \vec{r}_0^* et \vec{r}_1^* n'apparaissent dans le Lagrangien \mathcal{L} qu'à travers $\vec{r} = \vec{r}_1^* - \vec{r}_0^*$ et sa norme r . Dès lors,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_0^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_0^*} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_0^*} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_1^*} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_0^*} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_1^*} = 0.$$

Des équations de Lagrange, nous déduisons que $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_0^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_0^*} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_1^*} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_1^*}$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_0^*} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_1^*} = 0 & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_0^*} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_1^*} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_0^*} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_1^*} = C_1 = \vec{P}. \end{aligned}$$

Le moment \vec{P} est donc constant. Développons le calcul de \vec{P} :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_0^*} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_1^*} \\ &= m_0\dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{8c^2}4m_0(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)\dot{\vec{r}}_0^* + \frac{k^2m_0m_1}{2rc^2} \left(6\dot{\vec{r}}_0^* - 7\dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2}\vec{r}(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) \right) \\ &\quad + m_1\dot{\vec{r}}_1^* + \frac{1}{8c^2}4m_1(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)\dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2m_0m_1}{2rc^2} \left(6\dot{\vec{r}}_1^* - 7\dot{\vec{r}}_0^* - \frac{1}{r^2}\vec{r}(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r}) \right) \\ &= m_0\dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{2c^2}m_0(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)\dot{\vec{r}}_0^* + m_1\dot{\vec{r}}_1^* + \frac{1}{2c^2}m_1(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)\dot{\vec{r}}_1^* \\ &\quad + \frac{k^2m_0m_1}{2rc^2} \left(-\dot{\vec{r}}_0^* - \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2}\vec{r}(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{1}{r^2}\vec{r}(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_0 \dot{\vec{r}}_0^* \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* - \frac{k^2 m_1}{2rc^2} \right) + m_1 \dot{\vec{r}}_1^* \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{k^2 m_0}{2rc^2} \right) \\
&\quad + \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left(-\frac{1}{r^2} \vec{r} (\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{1}{r^2} \vec{r} (\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r}) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ m_0 \vec{r}_0^* \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* - \frac{k^2 m_1}{2rc^2} \right) + m_1 \vec{r}_1^* \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{k^2 m_0}{2rc^2} \right) \right\} \\
&= \frac{d}{dt} \{ m_0^G \vec{r}_0^* + m_1^G \vec{r}_1^* \},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
m_0^G &= m_0 \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* - \frac{k^2 m_1}{2rc^2} \right) = m_0 + m_0 \frac{1}{c^2} f(\dot{\vec{r}}_0^*, \vec{r}) \\
m_1^G &= m_1 \left(1 + \frac{1}{2c^2} \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{k^2 m_0}{2rc^2} \right) = m_1 + m_1 \frac{1}{c^2} f(\dot{\vec{r}}_1^*, \vec{r})
\end{aligned}$$

sont les masses gravitationnelles. En intégrant des deux côtés de l'égalité par rapport au temps, nous obtenons

$$m_0^G \vec{r}_0^* + m_1^G \vec{r}_1^* - \vec{P}t = C_2,$$

où C_2 est une constante. Cette dernière équation montre que le centre des masses gravitationnelles a une vitesse constante. Dès lors, nous pouvons changer le centre du repère et prendre le centre des masses gravitationnelles comme le centre du repère. Le vecteur position de la masse m_0 est noté \vec{r}_0 tandis que le vecteur \vec{r}_1 représente la position de m_1 par rapport au nouveau centre du repère, le centre de masse gravitationnel. Une représentation schématique est donnée à la figure 3.2. Sur cette figure, sont représentés les vecteurs \vec{r}_0 et \vec{r}_1 . Notons que dans les calculs, ces deux vecteurs n'apparaissent qu'à travers $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{r}_1^* - \vec{r}_0^*$.

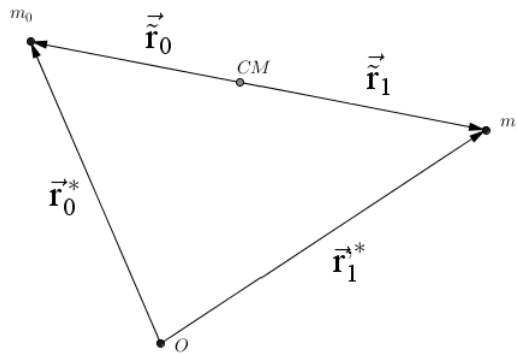


FIGURE 3.2 – Représentation du centre de masse (CM) et des vecteurs position des masses m_0 et m_1

Dans les nouvelles coordonnées, nous avons

$$m_0^G \vec{r}_0 + m_1^G \vec{r}_1 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_0^G \vec{r}_0 + m_1^G \vec{r}_1) = 0 &\Leftrightarrow m_0^G \dot{\vec{r}}_0 + m_1^G \dot{\vec{r}}_1 + \dot{m}_0^G \vec{r}_0 + \dot{m}_1^G \vec{r}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m_0^G \dot{\vec{r}}_0 + m_1^G \dot{\vec{r}}_1 = -\dot{m}_0^G \vec{r}_0 - \dot{m}_1^G \vec{r}_1 := \Gamma, \end{aligned}$$

où Γ est d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$. En effet, pour $i = 0, 1$,

$$\begin{aligned} m_i^G = m_i + m_i \frac{1}{c^2} f(\dot{\vec{r}}_i^*, \vec{r}) &\Rightarrow \frac{dm_i^G}{dt} = 0 + \frac{1}{c^2} m_i f' \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \\ &\Rightarrow \Gamma := -\dot{m}_0^G \vec{r}_0 - \dot{m}_1^G \vec{r}_1 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de trouver une expression pour $\dot{\vec{r}}_0^*$ et $\dot{\vec{r}}_1^*$. Pour cela, nous repartons des équations

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_0, \\ m_0^G \dot{\vec{r}}_0 + m_1^G \dot{\vec{r}}_1 = \Gamma. \end{cases}$$

Nous remplaçons $\dot{\vec{r}}_1$ par $\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_0$ et obtenons alors

$$\begin{aligned} m_0^G \dot{\vec{r}}_0 + m_1^G (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_0) = \Gamma &\Leftrightarrow (m_0^G + m_1^G) \dot{\vec{r}}_0 + m_1^G \dot{\vec{r}} = \Gamma \\ &\Leftrightarrow (m_0^G + m_1^G) \dot{\vec{r}}_0 = \Gamma - m_1^G \dot{\vec{r}} \\ &\Leftrightarrow \dot{\vec{r}}_0 = \frac{\Gamma - m_1^G \dot{\vec{r}}}{m_0^G + m_1^G}, \end{aligned}$$

et

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_0 = \frac{\Gamma + m_0^G \dot{\vec{r}}}{m_0^G + m_1^G}.$$

Il s'agit d'un système de deux équations. Nous utilisons les définitions $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1^* - \dot{\vec{r}}_0^* = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_0$ et $m_i^G = m_i + m_i \frac{1}{c^2} f(\dot{\vec{r}}_i^*, \vec{r})$ pour le résoudre. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_0^* &= \frac{-m_1 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1}, \\ \dot{\vec{r}}_1^* &= \frac{m_0 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1}. \end{aligned}$$

Nous réécrivons le Lagrangien (3.9) dans le nouveau repère en remplaçant $\dot{\vec{r}}_0^*$ et $\dot{\vec{r}}_1^*$ par leur nouvelle expression. Les détails de cette réécriture se trouvent dans l'Annexe B. Après

multiplication par $\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}$, de façon à normaliser le Lagrangien, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu_1}{r} + \frac{1}{8c^2}(1-3\nu)(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \\ & + \frac{\mu_1}{2rc^2} \left\{ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}(3+\nu) + \frac{\nu(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2}{r^2} \right\} - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\mu_1}{r} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right),\end{aligned}$$

où $\mu_1 = k^2(m_0 + m_1)$ et $\nu = \frac{m_0m_1}{(m_0+m_1)^2}$.

Finalement, nous reformulons le Lagrangien en fonction des puissances de $\frac{1}{r}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu_1}{r} + \left\{ - \left[\frac{\gamma_1}{c^2}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + \frac{\gamma_2}{c^2r}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\gamma_3}{c^2r^2} + \frac{\gamma_4}{c^2r^3}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \right\}, \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{1-3\nu}{8}, \\ \gamma_2 &= -\frac{\mu_1(3+\nu)}{2}, \\ \gamma_3 &= \frac{\mu_1^2}{2}, \\ \gamma_4 &= -\frac{\mu_1\nu}{2}.\end{aligned}$$

Cette expression permet de déduire qu'en relativité générale, le Lagrangien n'est pas la somme des énergies cinétique et potentielle, comme en mécanique classique.

La composante lagrangienne représentant la théorie post-newtonienne (3.11) se réécrit donc

$$\mathcal{L}_{PN} = -\frac{1}{c^2} \left[\gamma_1(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + \frac{\gamma_2}{r}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\gamma_3}{r^2} + \frac{\gamma_4}{r^3}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

3.3 Formulation hamiltonienne

Le moment cinétique \vec{p} associé à la variable \vec{r} est obtenu en dérivant le Lagrangien (3.12) par rapport à $\dot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \dot{\vec{r}} - \frac{1}{c^2} \left[4\gamma_1(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} + \frac{2\gamma_2}{r}\dot{\vec{r}} + \frac{2\gamma_4}{r^3}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right] \\ &= \dot{\vec{r}} + \vec{R} \left(\frac{1}{c^2} \right).\end{aligned} \quad (3.13)$$

Remarquons que d'après l'égalité (3.13), $p = \dot{r}$ lorsque l'on ne considère pas les corrections relativistes.

Nous trouvons l'Hamiltonien \mathcal{H} en appliquant $\dot{\vec{r}} = \vec{p} - \vec{R}$ (équation (3.13)) et la transformation de Legendre au Lagrangien \mathcal{L} (3.12), comme expliqué dans le cours de Géométrie

symplectique [4] :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{p}) \\
&= \vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{R}) - \left(\frac{1}{2} (\vec{p} - \vec{R}) \cdot (\vec{p} - \vec{R}) + \frac{\mu}{r} + \mathcal{L}_{PN} \right) \\
&= \vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{R} - \left\{ \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{R} + \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{R} + \frac{\mu}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c^2} \left[\gamma_1 (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + \frac{\gamma_2}{r} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\gamma_3}{r^2} + \frac{\gamma_4}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{\mu_1}{r} + \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\gamma_1 (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 + \frac{\gamma_2}{r} (\vec{p} \cdot \vec{p}) + \frac{\gamma_3}{r^2} + \frac{\gamma_4}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right] \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right),
\end{aligned}$$

où nous avons négligé les termes en R^2 car il sont d'ordre $\mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right)$.

L'Hamiltonien que nous trouvons est celui d'un problème képlérien perturbé. En effet, il peut s'écrire comme la somme d'une composante hamiltonienne newtonienne \mathcal{H}_N et d'une composante hamiltonienne post-newtonienne (les corrections relativistes) \mathcal{H}_{GR} . Nous reprenons ci-dessous ces deux composantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_N &= \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{\mu_1}{r}, \\
\mathcal{H}_{GR} &= \frac{1}{c^2} \left[\gamma_1 (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 + \frac{\gamma_2}{r} \vec{p} \cdot \vec{p} + \frac{\gamma_3}{r^2} + \frac{\gamma_4}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

3.4 Moyennisation de \mathcal{H}_{GR}

Nous nous intéressons uniquement aux corrections relativistes entre les deux corps m_0 et m_1 . Il n'y a donc pas de confusion d'indice possible car l'indice 1 est le seul à apparaître dans nos développements. Dès lors, le demi-grand axe a_1 , l'anomalie moyenne M_1 , l'anomalie vraie f_1 , l'excentricité e_1 , le paramètre de masse $\mu_1 = k^2(m_0 + m_1)$ ainsi que la masse réduite $\beta_1 = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}$ seront, dans cette section, notés sans indice pour faciliter la lecture.

Nous allons moyenner \mathcal{H}_{GR} par rapport à l'anomalie moyenne $l = M$. La moyennisation est linéaire, appliquons-la à chaque terme de (3.14) :

$$\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle = \frac{1}{c^2} \left[\gamma_1 \langle (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 \rangle + \gamma_2 \left\langle \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r} \right\rangle + \gamma_3 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle + \gamma_4 \left\langle \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{r^3} \right\rangle \right].$$

Un rappel concernant la moyennisation se trouve dans la section 2.2.

Pour plus de clarté, calculons séparément chaque terme. Nous commençons par moyenner $(\vec{p} \cdot \vec{p})^2$.

Moyennisation de $(\vec{p} \cdot \vec{p})^2$

Tout d'abord, nous montrons⁴ que

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

En effet, l'Hamiltonien \mathcal{H}_{2body} du problème des deux corps non-perturbé s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2body} &= \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{\mu}{r} \\ &= -\frac{\mu^2}{2L^2}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du cours de Géométrie Symplectique [4]. Dès lors, en isolant $\vec{p} \cdot \vec{p}$, nous trouvons immédiatement que

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -\frac{\mu^2}{L^2} + \frac{2\mu}{r}.$$

En remplaçant dans cette expression $L = \sqrt{\mu a}$, nous obtenons :

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}) = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}. \quad (3.15)$$

Par la définition de $r = \frac{a(1-e_1^2)}{1+e \cos f}$, nous obtenons :

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{2\mu(1+e \cos f)}{a(1-e^2)} - \frac{\mu}{a}. \quad (3.16)$$

4. Cette égalité provient de l'article de Richardson et Kelly [40].

A présent, calculons la moyennisation de $(\vec{p} \cdot \vec{p})^2$, en utilisant l'expression trouvée en (3.16) :

$$\begin{aligned}
\langle (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos f)^2} df \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\mu(1+e \cos f)}{a(1-e^2)} - \frac{\mu}{a} \right)^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos f)^2} df \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\mu^2}{a^2(1-e^2)^2} (1+e \cos f)^2 + \frac{\mu^2}{a^2} - \frac{4\mu^2(1+e \cos f)}{a^2(1-e^2)} \right) \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos f)^2} df \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4\mu^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\mu^2}{a^2} \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos f)^2} - \frac{4\mu^2 \sqrt{1-e^2}}{a^2(1+e \cos f)} df \\
&= \frac{4\mu^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\mu^2}{a^2} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{df}{(1+e \cos f)^2}}_{=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}} \\
&\quad - \frac{4\mu^2 \sqrt{1-e^2}}{a^2} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{df}{(1+e \cos f)}}_{=\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\mu^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\mu^2}{a^2} - \frac{4\mu^2}{a^2} = \frac{4\mu^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} - \frac{3\mu^2}{a^2}. \tag{3.18}$$

L'égalité (3.17) a été calculée à l'aide de l'ouvrage⁵ de Gradshteyn et Ryzhik [16].

5. Nous nous servons de l'expression générale disponible à la page 383 de Gradshteyn et Ryzhik [16] :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n+1}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \mathcal{P}_n \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \right), \tag{3.19}$$

où \mathcal{P}_n est le *polynôme de Legendre* de degré n .

Nous appliquons donc l'égalité (3.19), premièrement, avec $a = 1$, $b = e$ et $n = 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{(1+e \cos f)^2} = \frac{1}{(1-e^2)} \mathcal{P}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et deuxièmement, nous appliquons (3.19) avec $a = 1$, $b = e$ et $n = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{(1+e \cos f)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{P}_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Moyennisation de $\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r}$

De façon à simplifier les calculs de moyennisation, réexprimons tout d'abord $\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r}$. Nous repartons de l'expression (3.15), que nous divisons par r :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r} = \frac{2\mu}{r^2} - \frac{\mu}{ar} = \frac{2\mu(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} - \frac{\mu(1 + e \cos f)}{a^2(1 - e^2)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la moyennisation :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r} \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos f)^2} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\mu}{a^2(1 - e^2)^2} (1 + e \cos f)^2 - \frac{\mu(1 + e \cos f)}{a^2(1 - e^2)} \right) \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos f)^2} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{\mu \sqrt{1 - e^2}}{a^2(1 + e \cos f)} df \\ &= \frac{2\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu \sqrt{1 - e^2}}{a^2(1 + e \cos f)} df \\ &= \frac{2\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{\mu \sqrt{1 - e^2}}{a^2} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos f)} df}_{=\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}} df \\ &= \frac{2\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{\mu}{a^2} \\ &= \frac{\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (2 - \sqrt{1 - e^2}), \end{aligned} \tag{3.20}$$

où l'égalité (3.20) est identique à celle de (3.17).

Moyennisation de $\frac{1}{r^2}$

Le troisième terme à moyenner est $\frac{1}{r^2}$:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} dM \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} dM \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos f)^2} df \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} df \\
 &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Moyennisation de $\frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{r^3}$

Pour ce faire, nous avons besoin de l'égalité

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = \frac{\mu e r}{G} \sin f \tag{3.23}$$

qui est vérifiée pour le problème des deux corps non perturbés. En effet, dans le plan de l'orbite,

$$\vec{r} = (r \cos f, r \sin f) = \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \cos f, \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \sin f \right).$$

Nous calculons également \dot{r} :

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{df} \frac{df}{dt} = a(1 - e^2) \frac{e \sin f \dot{f}}{(1 + e \cos f)^2} \\
 &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \frac{e \sin f \dot{f}}{1 + e \cos f} = r \frac{e \sin f \dot{f}}{1 + e \cos f}.
 \end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de donner l'expression de $\dot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}} &= \left(\frac{d}{dt}(r \cos f), \frac{d}{dt}(r \sin f) \right) \\
 &= \left(\dot{r} \cos f - r \sin f \dot{f}, \dot{r} \sin f + r \cos f \dot{f} \right).
 \end{aligned}$$

Dès lors⁶,

$$\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \vec{p} &= \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \\
&= r \cos f (\dot{r} \cos f - r \sin f \dot{f}) + r \sin f (\dot{r} \sin f + r \cos f \dot{f}) \\
&= r \dot{r} \cos^2 f - r^2 \sin f \cos f \dot{f} + r \dot{r} \sin^2 f + r^2 \sin f \cos f \dot{f} \\
&= r \dot{r} \\
&= r \left(r \frac{e \sin f \dot{f}}{1 + e \cos f} \right) = r^2 \dot{f} \frac{e \sin f}{1 + e \cos f} \\
&= r^2 \frac{\sqrt{1 - e^2} a^2}{r^2} \frac{\sqrt{\mu a}}{a^2} \left(\frac{e \sin f}{1 + e \cos f} \right) \\
&= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{\mu a} e \sin f}{1 + e \cos f} \\
&= \underbrace{\mu e \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}}_{=r} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}}}_{=\frac{1}{G}} \sin f \\
&= \frac{\mu e r}{G} \sin f.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Avant de calculer l'intégrale de la moyennisation, reformulons le produit scalaire entre \vec{r} et \vec{p} . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \vec{p} &= \frac{\mu e r}{G} \sin f \\
&= \frac{\mu e}{G} \sin f \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \\
&= \frac{\mu e a}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}} \sin f \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} \\
&= \sqrt{\mu a} e \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin f}{1 + e \cos f} \\
\Rightarrow (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 &= \mu a e^2 (1 - e^2) \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)^2}.
\end{aligned}$$

6. L'égalité (3.24) est obtenue de la façon suivante :

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dM} \frac{dM}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2} a^2}{r^2} n = \frac{\sqrt{1 - e^2} a^2}{r^2} \frac{\sqrt{\mu a}}{a^2},$$

où n est le moyen mouvement et $\frac{df}{dM} = \frac{\sqrt{1 - e^2} a^2}{r^2}$ provient des calculs faits à l'Annexe A.

Nous utilisons la relation (3.25) issue de la *troisième loi de Kepler*⁷ :

$$\sqrt{\mu a} = na^2, \quad (3.25)$$

et nous obtenons :

$$(\vec{r} \cdot \vec{p})^2 = n^2 a^4 e^2 (1 - e^2) \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)^2}.$$

En divisant ce que nous avons calculé par r^3 , nous obtenons finalement une formulation facile à moyenner :

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{r^3} &= n^2 a^4 e^2 (1 - e^2) \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)^2} \frac{(1 + e \cos f)^3}{a^3 (1 - e^2)^3} \\ &= \frac{n^2 a e^2}{(1 - e^2)^2} \sin^2 f (1 + e \cos f) \\ \Rightarrow \left\langle \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{r^3} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n^2 a e^2}{(1 - e^2)^2} \sin^2 f (1 + e \cos f) \, dM \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 a e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)} \, df \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 a e^2}{\sqrt{1 - e^2}} 2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)} \, df \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 a e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{2\pi}{e^2} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ &= \frac{\mu}{a^2} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \right) \\ &= \frac{\mu}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{\mu}{a^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

où l'intégrale a été calculée à l'aide de l'ouvrage [16] (p 379).

Nous remplaçons maintenant les quatre termes de \mathcal{H}_{GR} par les expressions trouvées en (3.18), (3.21), (3.22), et (3.26) :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle = \frac{1}{c^2} \left[\gamma_1 \langle (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 \rangle + \gamma_2 \left\langle \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{r} \right\rangle + \gamma_3 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle + \gamma_4 \left\langle \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{r^3} \right\rangle \right]$$

7. La troisième loi de Kepler s'exprime par

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

où T est la période orbitale. Le moyen mouvement est $n = \frac{2\pi}{T}$, on peut donc réécrire la troisième loi de Kepler comme :

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{\mu} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{a^3}{\mu} \Leftrightarrow \sqrt{\mu a} = na^2.$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(1-3\nu)}{8c^3} \left[\frac{4\mu^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{3\mu^2}{a^2} \right] - \frac{\mu(3+\nu)}{2c^2} \left[\frac{2\mu}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{\mu}{a^2} \right] \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2c^2} \frac{1}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{\mu\nu}{2c^2} \left[\frac{\mu}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{\mu}{a^2} \right] \\
&= \frac{1}{2a^2c^2\sqrt{1-e^2}} \left[-(1-3\nu)\mu^2 - 2(3+\nu)\mu^2 - \nu\mu^2 + \mu^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{8c^2a^2} \left[3(1-3\nu)\mu^2 + 4\mu^2(3+\nu) + 4\mu^2\nu \right] \\
&= \frac{-6\mu^2}{2a^2c^2\sqrt{1-e^2}} + \frac{\mu^2(15-\nu)}{8c^2a^2}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire cette composante de l'Hamiltonien dans les variables de Delaunay modifiées⁸ $L = \beta\sqrt{\mu a}$ et $G = L\sqrt{1-e}$:

$$\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle = -\frac{3\mu^4\beta^4}{c^2L^3G} + \frac{\mu^4(15-\nu)\beta^4}{8c^2L^4}.$$

Cependant, comme nous l'avons dit à la section 3.2, nous avons divisé le Lagrangien par β . Il faut maintenant multiplier $\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle$ par β . La composante finale, séculaire, de l'Hamiltonien qui corrige l'effet de la relativité est donc donnée par

$$\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle = -\frac{3\mu^4\beta^5}{c^2L^3G} + \frac{\mu^4(15-\nu)\beta^4}{8c^2L^4}. \quad (3.27)$$

Rappelons les équations d'Hamilton, où $\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \mathcal{H}_N \rangle + \langle \mathcal{H}_{GR} \rangle$,

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial L}, & \dot{L} &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial l}, \\
\dot{g} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial G}, & \dot{G} &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial g}, \\
\dot{h} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial H}, & \dot{H} &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial h}.
\end{aligned}$$

Par les équations d'Hamilton, L est constant. En effet,

$$\dot{L} = -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial l} = 0.$$

Ceci implique que le demi-grand axe a l'est également.

Le deuxième terme de la somme (3.27) est par conséquent une constante, car il ne dépend que d'éléments constants (μ , ν et a), et nous pouvons simplifier $\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle$:

$$\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle = -\frac{3\mu^4\beta^5}{c^2L^3G}.$$

8. Comme pour les éléments orbitaux, nous omettons l'indice 1 relatif à m_1 jusqu'à la fin du chapitre.

Comme $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ ne dépend que du moment G , seule la variable⁹ $g = \varpi$ va être modifiée par les corrections relativistes. En effet,

$$\dot{g}_{\text{GR}} = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle}{\partial G} = \frac{3\mu^4 \beta^5}{c^2 L^3 G^2} = \frac{3\mu^4 \beta^5}{c^2 L^5 (1 - e^2)} = \frac{3\mu^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}. \quad (3.28)$$

C'est cette formule, également obtenue par Migaszewski et Goździewski dans leur article [24], qui décrit l'avance (ou précession) du périastre due à la relativité.

L'avance du périastre est due à la relativité générale. Dans notre système solaire, Mercure est perturbée par la présence du Soleil et on peut observer l'avance de son périhélie.

Le site de l'Observatoire de Paris [34] explique de façon très claire ce qu'est l'avance du périhélie, à l'aide de la figure 3.3.

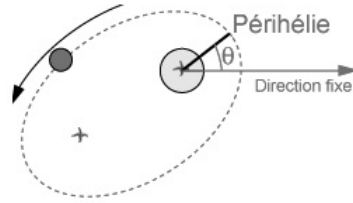


FIGURE 3.3 – L'angle θ permet de donner la position du périhélie de Mercure par rapport à une direction fixe. Mercure est représentée en bleu tandis que le Soleil est en jaune, figure issue de [34]

On détermine la position du périhélie en fonction d'une direction fixe de référence (sur la figure 2.2, cette direction est notée Υ). Si l'angle θ entre cette direction et la direction du périhélie augmente, alors on parle d'avance du périhélie, ou de précession du périhélie.

3.5 Comparaison avec d'autres articles

Le dernier point de ce chapitre compare les corrections relativistes obtenues par Migaszewski et Goździewski [24] avec celles de deux autres articles : Nagasawa et Lin [27], Fabrycky et Tremaine [12]. Nous comparons les différentes formulations de $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ et \dot{g}_{GR} à la table 3.1. Pour plus de clarté, les expressions obtenues précédemment sont exprimées à la fois en variables de Delaunay et en éléments orbitaux.

En ce qui concerne l'article de Fabrycky et Tremaine, nous devons signaler que les auteurs travaillent en coordonnées de Jacobi. Cependant, lorsque nous nous concentrons sur l'orbite de m_1 autour du corps central, il n'y a aucune différence que nous soyons en coordonnées héliocentriques ou en coordonnées de Jacobi. Comme le montre la table 3.1, les expressions trouvées dans les deux articles sont équivalentes.

Nous comparons ensuite avec l'article de Nagasawa et Lin. D'une part, nous constatons que l'excentricité de m_1 n'intervient pas. En effet, les auteurs supposent une orbite

9. Pour un système en trois dimensions, on rappelle que $g = \omega$. Pour un système coplanaire, $g = \varpi = \omega + \Omega$ car dans un tel système, $\Omega = 0$.

circulaire. D'autre part, ils supposent que m_1 est une planète, c'est-à-dire, $m_1 \ll M_\star$. Si nous réécrivons l'expression de \dot{g}_{GR} de cet article, nous obtenons :

$$\dot{g}_{\text{GR}} = \frac{3n_1 GM_\star}{a_1 c^2} = \frac{3\sqrt{\mu_1} GM_\star}{a_1^{5/2} c^2} = \frac{3\sqrt{GM_\star} GM_\star}{a_1^{5/2} c^2} = \frac{3G^{3/2} M_\star^{3/2}}{a_1^{5/2} c^2},$$

ce qui est bien équivalent aux expressions trouvées dans l'article de Fabrycky et Tremaine et dans notre travail dans le cas d'une masse planétaire sur une orbite circulaire. L'expression de $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ n'est pas indiquée dans l'article de Nagasawa et Lin, les auteurs ont toutefois indiqué la force dont dérive ce potentiel, mais nous ne la donnons pas ici.

Le chapitre suivant considérera les corps en tant que masses non ponctuelles. Nous suivrons le même cheminement : tout d'abord, nous expliquerons comment nous obtenons les corrections à apporter à l'Hamiltonien, avant de le moyenner et de regarder l'évolution des éléments orbitaux.

Relativité	Nagasawa et Lin	Fabrycky et Tremaine	Migaszewski et Gozdziwski
$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$	Non indiqué	$-\frac{3G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a_{\text{in}}^2 c^2 (1 - e_{\text{in}}^2)^{1/2}}$ Équation (22) de [12]	$\frac{-3\mu^4 \beta^5}{c^2 L^3 G} = \frac{-3\mu^2 \beta}{c^2 a^2 \sqrt{1 - e^2}}$ $= \frac{-3k^4 (m_0 + m_1) m_0 m_1}{c^2 a^2 \sqrt{1 - e^2}}$
\dot{g}_{GR}	$\frac{3m_1 G M_\star}{a_1 c^2}$ Équation (8) de [27]	$\frac{3G^{3/2} (m_1 + m_2)^{3/2}}{a_{\text{in}}^{5/2} c^2 (1 - e_{\text{in}}^2)}$ Équation (23) de [12]	$\frac{3\mu^4 \beta^5}{c^2 L^3 G^2} = \frac{3\mu^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}$ $= \frac{3(k^2 (m_0 + m_1))^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}$

TABLE 3.1 – Comparaison des corrections relativistes des articles de Nagasawa et Lin [27], Fabrycky et Tremaine [12], et Migaszewski et Gozdziwski [24]. Les notations de Nagasawa et Lin [27] sont les suivantes : $G = k^2$, $M_\star = m_0$ et $M_1 = m_1$. Les notations de Fabrycky et Tremaine [12] sont : $G = k^2$, $a_{\text{in}} = a_1$, $e_{\text{in}} = e_1$, $m_1 = m_0$ et $m_2 = m_1$.

Chapitre 4

Masses non ponctuelles

Jusqu'à présent, nous avons considéré la masse centrale comme une masse ponctuelle, sans tenir compte de sa forme. Dans ce chapitre, nous allons maintenant en tenir compte. Le potentiel et l'Hamiltonien seront dès lors corrigés. Dans la première section, nous analysons comment le corps primaire est déformé suite à sa rotation sur lui-même. Après avoir modélisé cette déformation, nous déduisons la composante hamiltonienne, notée $\mathcal{H}_{\text{spin}}$, et nous la moyennons. Dans la deuxième section, nous nous intéressons à la déformation du corps central due à la présence d'un deuxième corps : l'effet de marée. Nous calculons la composante hamiltonienne \mathcal{H}_{TB} liée à cet effet et la moyennons. Les déformations causées par la rotation de l'étoile sur elle-même et par l'effet de marée sont assez petites pour pouvoir les considérer séparément et les additionner par la suite. La somme de ces deux composantes hamiltoniennes représente la correction apportée à l'Hamiltonien lorsqu'on considère que le corps primaire est une masse non ponctuelle.

4.1 Déformation du corps primaire liée à sa rotation

Dans la première section, nous traitons de la déformation du corps central due à sa rotation sur lui-même. Plus un corps est non rigide, plus il aura tendance à s'aplatir en raison de sa rotation. Le corps est donc déformé, ce dont nous devons tenir compte dans l'Hamiltonien final via le terme $\mathcal{H}_{\text{spin}}$. Dans un premier temps, nous allons expliquer d'où vient cette déformation, développer le potentiel qui y est lié avant d'arriver à l'écriture de la composante hamiltonienne $\mathcal{H}_{\text{spin}}$. Comme dans le chapitre précédent, nous moyennerons alors ce dernier pour obtenir le mouvement séculaire.

Cette déformation est présente pour chaque corps en rotation. Dans cette étude, nous considérons la déformation d'une masse m_0 (stellaire ou planétaire) en interaction gravitationnelle avec une masse ponctuelle m_1 .

4.1.1 Origine de l'aplatissement de l'étoile

Dans cette sous-section, nous allons décrire les déformations liées à la rotation d'un corps sur lui-même. Pour aboutir à l'expression de la composante hamiltonienne exploitable pour la suite ($\mathcal{H}_{\text{spin}}$), nous nous basons principalement sur les notes de Murray et Dermott [26].

Nous allons procéder par étape pour obtenir le potentiel qui nous permettra de trouver $\mathcal{H}_{\text{spin}}$:

1. Nous considérons premièrement un corps rigide ayant une vitesse de rotation et calculons son potentiel centrifuge.
2. Nous supposons qu'un océan (couche fluide) déformable recouvre le corps en rotation et calculons la déformation de ce dernier due à la rotation.
3. Le corps, à cause de l'océan déformable, n'étant plus une sphère, nous adaptons son potentiel gravitationnel.

À la fin de la troisième étape, nous serons en mesure d'exprimer la composante hamiltonienne $\mathcal{H}_{\text{spin}}$.

1. Dans la première étape, nous considérons un corps sphérique, rigide, de rayon équatorial R_0 . La vitesse angulaire est Ω . L'origine du repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est choisie comme étant au centre du corps (*cfr* figure 4.1). La rotation est d'axe vertical \vec{e}_z . Le plan $O\vec{e}_x\vec{e}_y$ est le plan équatorial.

Tout point $P = (x, y, z)$ peut s'exprimer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \sin \lambda, \\ y &= r \sin \theta \cos \lambda, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

où

- r est la distance entre le point P à la surface du corps et le centre de masse de celui-ci,
- θ est la colatitude,
- λ est la longitude (voir figure 4.1).

L'accélération centrifuge d'un point P de la surface du corps est notée \vec{a} et est telle que $\vec{a} = (\vec{a}_x, \vec{a}_y, 0)$, et l'accélération centrifuge n'a pas de composante dans la direction de l'axe de rotation. Tout le long d'un parallèle donné, l'accélération centrifuge est tangente à ce dernier.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= \Omega^2 x \vec{e}_x = \Omega^2 r \sin \theta \sin \lambda \vec{e}_x, \\ \vec{a}_y &= \Omega^2 y \vec{e}_y = \Omega^2 r \sin \theta \cos \lambda \vec{e}_y, \\ \vec{a}_z &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, un point quelconque (x, y, z) de la surface du corps subit l'accélération centrifuge :

$$\vec{a} = (\Omega^2 x, \Omega^2 y, 0),$$

et la norme de l'accélération centrifuge est constante :

$$\|\vec{a}\|^2 = \Omega^4 x^2 + \Omega^4 y^2 = \Omega^4 (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) = \Omega^4 r^2 \sin^2 \theta,$$

et cette norme est indépendante de λ et donc identique tout le long d'un même

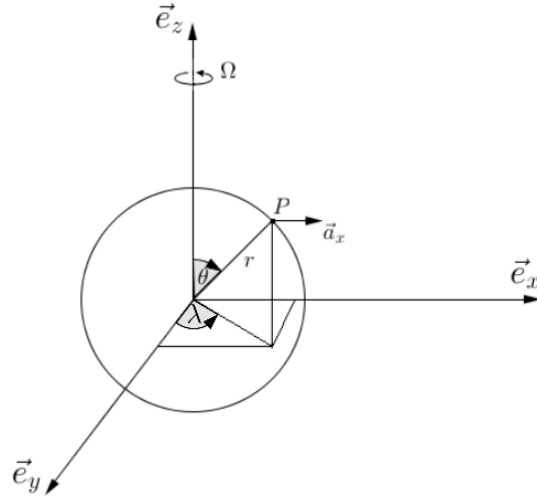


FIGURE 4.1 – Représentation d'un corps dont l'axe vertical est l'axe de rotation (vitesse angulaire de rotation Ω), du point P sur sa surface et de sa position r , ainsi que de la colatitude θ et de sa longitude λ

parallèle.

Notre objectif est de calculer le potentiel lié à cette accélération. Nous notons U_{cf} ce potentiel et montrons qu'il vaut :

$$U_{\text{cf}}(r, \theta) = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -\nabla U_{\text{cf}} = -\nabla \left(-\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \\ &= -\nabla \left(-\frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2) \right) \\ &= (\Omega^2 x, \Omega^2 y, 0), \end{aligned}$$

qui est l'accélération centrifuge donnée ci-dessus.

2. La deuxième étape est d'ajouter une couche fluide autour de l'étoile. En supposant que la déformation de la couche fluide extérieure du corps est faible, la position de tout point P à la surface de ce corps s'écrit alors

$$r = R_0 + \delta r(\theta), \tag{4.1}$$

où R_0 est le rayon équatorial du corps et $\delta r(\theta)$ est l'épaisseur du fluide.

La variation de la couche fluide $\delta r(\theta)$ dépend de la colatitude mais pas de la longitude

λ .

Le fluide subit à la fois le potentiel gravitationnel du corps et le potentiel centrifuge introduit ci-dessus, c'est-à-dire :

$$U(r, \theta) = -\frac{k^2 m_0}{r} + U_{\text{cf}}(r, \theta). \quad (4.2)$$

Nous reformulons le potentiel (4.2) en remplaçant r par l'expression donnée dans l'égalité (4.1). Nous obtenons alors ¹

$$\begin{aligned} U &= \frac{-k^2 m_0}{R_0 + \delta r} - \frac{1}{2} \Omega^2 (R_0 + \delta r)^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{-k^2 m_0}{R_0 + \delta r} - \frac{1}{2} \Omega^2 (R_0^2 + (\delta r)^2 + 2R_0 \delta r) \sin^2 \theta \\ &= \frac{-k^2 m_0}{R_0 + \delta r} - \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \Omega^2 (\delta r)^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nous ne gardons pas le dernier terme $\frac{1}{2} \Omega^2 (\delta r)^2 \sin^2 \theta$, en raison de son ordre supérieur ($(\delta r)^2 \ll 1$).

Nous avons donc

$$U \simeq \underbrace{\frac{-k^2 m_0}{R_0 + \delta r}}_{U_{\text{grav}}} - \underbrace{\frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta}_{U_{\text{cf}}}. \quad (4.4)$$

Nous développons maintenant le premier terme du potentiel (4.4). Par un développement de Taylor, nous savons que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \mathcal{O}(x^2) \simeq 1 - x.$$

Dès lors, en appliquant cette approximation à $\frac{1}{R_0 + \delta r}$, nous obtenons

$$\frac{1}{R_0 + \delta r} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta r}{R_0}} \right) \simeq \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{\delta r}{R_0} \right),$$

si nous négligeons les termes d'ordre deux. Nous écrivons donc le potentiel (4.4) comme suit

$$\begin{aligned} U &\simeq \frac{-k^2 m_0}{R_0} \left(1 - \frac{\delta r}{R_0} \right) - \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta \\ &\simeq \frac{-k^2 m_0}{R_0} + \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r - \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

1. La dépendance en θ dans l'expression $R_0 + \delta r(\theta)$ est sous-entendue dans les calculs pour alléger les écritures. À présent, nous écrivons $r = R_0 + \delta r$.

Murray et Dermott [26] nous indique² que la relation

$$\Omega^2 R_0 \ll \frac{k^2 m_0}{R_0^2}$$

est généralement vérifiée, donc

$$\Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta \ll \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r \sin^2 \theta \leq \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r,$$

ce qui nous permet de négliger le terme $-\Omega^2 R_0 \delta r \sin^2 \theta$.
Finalement, l'approximation devient

$$U \simeq -\frac{k^2 m_0}{R_0} + \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r - \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta.$$

Cette écriture du potentiel permet d'expliquer que la rotation d'un corps sur lui-même engendre un aplatissement aux pôles. En effet, à l'équilibre, la surface de la couche fluide est une surface équipotentielle, i.e. le potentiel y est constant. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \underbrace{U}_{cte} &\simeq \underbrace{-\frac{k^2 m_0}{R_0}}_{cte} + \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r - \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow \frac{k^2 m_0}{R_0^2} \delta r &\simeq C + \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow \delta r &\simeq \tilde{C} + \frac{\Omega^2}{2k^2 m_0} R_0^4 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

où $C = U + \frac{k^2 m_0}{R_0}$ est une constante et $\tilde{C} = \frac{R_0^2}{k^2 m_0} C$.

La couche liquide est maximale à l'équateur et minimale aux pôles. En effet, la variation de la couche fluide dépend de la colatitude θ et est donnée par

$$\delta r(\theta) \simeq \tilde{C} + \frac{\Omega^2}{2k^2 m_0} R_0^4 \sin^2 \theta. \quad (4.5)$$

2. Pour le Soleil, nous avons $\Omega = 84.125$ rad/année, $R_0 = 0.00465476$ UA et $m_0 = 1m_\odot$, et donc

$$\Omega^2 R_0 = 32.9418 \ll \frac{k^2 m_0}{R_0^2} = 3644140.$$

C'est dès lors vérifié pour le Soleil.

Pour la Terre, nous avons $\Omega = 2301.21$ rad/année, $R_0 = 4.26 \cdot 10^{-5}$ UA et $m_0 = 3.0032 \cdot 10^{-6} m_\odot$, et donc

$$\Omega^2 R_0 = 225.5912 \ll \frac{k^2 m_0}{R_0^2} = 6.5332 \cdot 10^4.$$

C'est dès lors vérifié pour les planètes semblables à la Terre.

Aux pôles

Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ alors P se trouve aux pôles. Dans ce cas, $\sin^2 \theta = 0$ et donc

$$\delta r(\pi) = \delta r(0) \simeq \tilde{C} < \delta r\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

A l'équateur

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors P se trouve à l'équateur. Dans ce cas, $\sin^2 \theta = 1$ et donc

$$\delta r\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq \tilde{C} + \frac{\Omega^2}{2k^2 m_0} R_0^4.$$

En résumé, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, nous avons³

$$\delta r(0) \simeq \tilde{C} \leq \delta r(\theta) \leq \tilde{C} + \frac{\Omega^2}{2k^2 m_0} R_0^4 \simeq \delta r\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui signifie que la déformation de la couche fluide est minimale aux pôles et maximale à l'équateur. Ces calculs montrent que la rotation du corps entraîne un aplatissement aux pôles, car la variation de la couche liquide est de plus en plus importante lorsqu'on s'approche de l'équateur.

Nous notons que la variation de la couche dépend également de R_0 et donc sera plus importante s'il s'agit d'un grand corps.

Nous pouvons quantifier l'aplatissement aux pôles par f (*flattening* dans l'ouvrage de Murray et Dermott [26]). La définition est la suivante :

$$f = \frac{r_{\text{équateur}} - r_{\text{pôle}}}{r_{\text{équateur}}}. \quad (4.6)$$

Nous avons que

$$f \simeq \frac{\Omega^2 R_0^3}{2k^2 m_0}.$$

En effet,

$$\begin{cases} \text{Equateur} & r_{\text{équateur}} = R_0 + \delta r\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq R_0 + \tilde{C} + \frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0}, \\ \text{Pôle} & r_{\text{pôle}} = R_0 + \delta r(0) \simeq R_0 + \tilde{C}. \end{cases}$$

On remplace dans la définition (4.6) les expressions de $r_{\text{équateur}}$ et de $r_{\text{pôle}}$ et nous trouvons alors

$$\begin{aligned} f &\simeq \frac{R_0 + \tilde{C} + \frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0} - R_0 - \tilde{C}}{R_0 + \tilde{C} + \frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0}} \\ &\simeq \frac{\frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0}}{R_0 + \tilde{C} + \frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0}} \end{aligned}$$

3. Les autres valeurs de la colatitude se traitent de manière similaire.

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{\frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0}}{R_0} \text{ car la déformation du corps central est faible et donc } R_0 \gg \tilde{C} + \frac{\Omega^2 R_0^4}{2k^2 m_0} \\
&\simeq \frac{\Omega^2 R_0^3}{2k^2 m_0} \\
&= \frac{q}{2},
\end{aligned}$$

où

$$q = \frac{\Omega^2 R_0^3}{k^2 m_0}. \quad (4.7)$$

Ce quotient q est le quotient de l'accélération centrifuge du corps primaire à l'équateur par l'accélération gravitationnelle. En effet, la norme de l'accélération centrifuge est égale à

$$\|\vec{a}\|^2 = \Omega^2 R_0 \sin \theta = \Omega^2 R_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \Omega^2 R_0,$$

et la norme de l'accélération gravitationnelle est égale à

$$\frac{k^2 m_0}{R_0^2}.$$

Le quotient de ces deux quantités vaut bien q .

Avec les derniers calculs que nous venons d'effectuer, nous avons conclu que le corps m_0 s'aplatit suite à sa rotation. Dès lors, considérer le potentiel gravitationnel d'un corps sphérique $U_{\text{grav}} = \frac{-k^2 m_0}{R_0}$ n'est pas correct. Il s'agit à présent d'inclure l'effet de la déformation sur le champ de gravité du corps m_0 .

3. Pour cette troisième et dernière étape avant la formulation de la composante hamiltonienne, nous allons travailler avec le potentiel gravitationnel d'un corps non plus sphérique mais modélisé grâce à un ellipsoïde qui possède deux grands axes principaux d'inertie égaux et un troisième petit axe principal d'inertie ($A = B > C$), comme c'est le cas pour un corps en rotation (*cfr.* étape 2).

Pour cette troisième étape, nous nous basons sur le cours de Gravitation classique de J. Pérez [38]. De façon à obtenir le potentiel de gravitation d'un tel corps, nous repartons du corps central dans le référentiel $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ défini ci-dessus. Nous changeons les notations les étapes 1 et 2 : $\vec{r} = (x, y, z)$ est désormais le vecteur position de la masse m_1 par rapport au centre O du corps primaire m_0 et $\vec{r}' = (x', y', z')$, le vecteur position d'un élément quelconque du corps m_0 . Les normes de ces vecteurs sont respectivement r et r' et la masse de l'élément est dm .

On suppose le corps m_0 de volume V et de masse $m_0 = \int_{\vec{r}' \in V} dm$. Soit, enfin, $\delta = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$, la distance entre m_1 et l'élément de masse dm . Les vecteurs position sont illustrés à la figure 4.2.

Avec ces notations, le potentiel gravitationnel du corps m_0 est donné par

$$U_{\text{grav}} = -k^2 \int_{\vec{r}' \in V} \frac{m_1}{\delta} dm, \quad (4.8)$$

et $\delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi$.

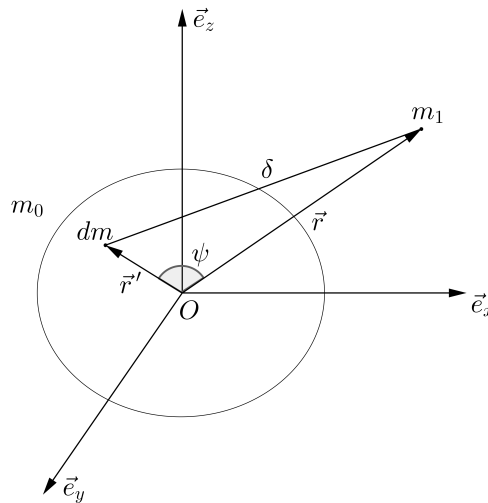


FIGURE 4.2 – Représentation des vecteurs positions \vec{r} et \vec{r}' , de la distance δ , de l'élément de masse dm et des corps m_0 et m_1 . Les axes \vec{e}_x et \vec{e}_y ont été échangés par rapport à la figure 4.1

Développons $1/\delta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\left(\frac{r'}{r}\right) - 2 \cos \psi\right)}}. \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor (autour de $x = 0$) de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

appliqué à $x = \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\left(\frac{r'}{r}\right) - 2 \cos \psi\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\left(\frac{r'}{r}\right) - 2 \cos \psi\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\left(\frac{r'}{r}\right) - 2 \cos \psi\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{5}{16}\right) \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\left(\frac{r'}{r}\right) - 2 \cos \psi\right)^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de façon à avoir un polynôme en $\left(\frac{r'}{r}\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{5}{2} \cos^3 \psi - \frac{3}{2} \cos \psi\right) + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{P}_0(\cos \psi) + \left(\frac{r'}{r}\right) \mathcal{P}_1(\cos \psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \mathcal{P}_3(\cos \psi) + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi), \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

où nous avons introduit les *polynômes de Legendre* $\mathcal{P}_n(\cdot)$. L'Annexe C offre un rappel concernant ces polynômes.

On remplace $\frac{1}{\delta}$ par la forme trouvée en (4.9) dans l'expression du potentiel (4.8) et nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 U_{\text{grav}} &= -k^2 m_1 \int_{\vec{r}' \in V} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) dm \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{k^2 m_1}{r} \frac{1}{r^n} \int_{\vec{r}' \in V} (r')^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) dm \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

Les premiers termes du potentiel sont donc

- $n = 0$

$$U_0 = -\frac{k^2 m_1}{r} \int_{\vec{r}' \in V} dm = -\frac{k^2 m_1 m_0}{r},$$

qui est le potentiel de gravitation lorsqu'on considère que le corps m_0 est un point. Ce potentiel a déjà été étudié dans le problème sans correction.

- $n = 1$

Pour cette composante U_1 du potentiel, nous utilisons la relation issue du produit scalaire :

$$\cos \psi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'} = \frac{xx' + yy' + zz'}{r r'}.$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\frac{k^2 m_1}{r^2} \int_{\vec{r}' \in V} r' \mathcal{P}_1(\cos \psi) dm \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^2} \int_{\vec{r}' \in V} r' \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} dm \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \int_{\vec{r}' \in V} xx' + yy' + zz' dm \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(x \int_{\vec{r}' \in V} x' dm + y \int_{\vec{r}' \in V} y' dm + z \int_{\vec{r}' \in V} z' dm \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1 m_0}{r^3} (xx_G + yy_G + zz_G),
\end{aligned}$$

où nous avons introduit la notation (x_G, y_G, z_G) , les coordonnées du centre de gravité du corps de masse m_0 . Rappelons que

$$\begin{cases} m_0 x_G &= \int_{\vec{r}' \in V} x' dm, \\ m_0 y_G &= \int_{\vec{r}' \in V} y' dm, \\ m_0 z_G &= \int_{\vec{r}' \in V} z' dm. \end{cases}$$

Or, le centre O du repère que nous avons choisi est le centre de gravité (x_G, y_G, z_G) du corps m_0 . Dès lors, dans ce repère, $(x_G, y_G, z_G) = (0, 0, 0)$ et

$$U_1 = 0.$$

• $n = 2$

$$\begin{aligned}
U_2 &= -\frac{k^2 m_1}{r} \frac{1}{r^2} \int_{\vec{r}' \in V} (r')^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) dm \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \int_{\vec{r}' \in V} (r')^2 \left(\frac{-1}{2} + \frac{3(xx' + yy' + zz')^2}{2(rr')^2} \right) dm \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \int_{\vec{r}' \in V} \frac{-(r')^2}{2} + \frac{3((xx')^2 + (yy')^2 + (zz')^2 + 2xx'yy' + 2xx'zz' + 2yy'zz')}{2r^2} dm.
\end{aligned}$$

Pour l'aisance des calculs, nous notons $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ et de la même manière, $(x', y', z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$. Grâce à ces notations, nous pouvons écrire que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2,$$

et

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2.$$

Dès lors, nous pouvons réécrire la composante U_2 du potentiel :

$$U_2 = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 dm + \frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \int_{\vec{r}' \in V} x'_i x'_j dm \right).$$

A ce stade, nous introduisons les moments et produits d'inertie. La *matrice d'inertie* I_C par rapport au centre de masse est donnée par

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

où les moments d'inertie I_{ii} et les produits d'inertie I_{ij} sont définis respectivement par ⁴

$$\begin{cases} I_{ii} = \int_{\vec{r}' \in V} (r')^2 - (x'_i)^2 dm, & i = 1 : 3, \\ I_{ij} = I_{ji} = - \int_{\vec{r}' \in V} x'_i x'_j dm, & i, j = 1 : 3 \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

La matrice d'inertie décrit la manière dont le corps s'oppose à une rotation autour du centre de masse.

Cependant, le repère que nous avons choisi n'est pas quelconque. En effet, le plan $O\vec{e}_x\vec{e}_y$ représente le plan équatorial du corps m_0 et l'axe de révolution n'est autre que l'axe \vec{e}_z . Ce choix de repère nous permet d'écrire la matrice d'inertie sous forme diagonale :

$$I_C = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

où A , B , et C sont les *axes principaux d'inertie*. Dans la configuration que nous étudions ⁵, $A = I_{11}$, $B = I_{22}$ et $C = I_{33}$.

4. Avec les notations $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, le moment d'inertie I_{11} s'écrit

$$I_{11} = \int_{\vec{r}' \in V} (r')^2 - (x'_1)^2 dm = \int_{\vec{r}' \in V} (y'_1)^2 + (z'_1)^2 dm.$$

Les moments d'inertie I_{22} et I_{33} s'écrivent de manière similaire.

5. En choisissant de cette façon les axes du référentiel, les axes d'inertie principaux sont confondus avec les vecteurs de base \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z . En effet, l'axe \vec{e}_z est l'axe de révolution, ce qui implique que tous les produits d'inertie sont nuls (voir par exemple [23]). Dès lors, la matrice d'inertie est diagonale et les axes principaux d'inertie sont définis par les moments d'inertie et donc égaux

$$A = I_{11}, \quad B = I_{22}, \quad C = I_{33}.$$

Repartons de U_2 :

$$U_2 = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 dm + \frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \int_{\vec{r}' \in V} x'_i x'_j dm \right).$$

Comme $\forall i \neq j, I_{ij} = -\int x'_i x'_j dm = 0$, la double somme $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \int_{\vec{r}' \in V} x'_i x'_j dm$ est uniquement non-nulle lorsque $i = j$. Dès lors, le potentiel se simplifie :

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 dm + \frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \int_{\vec{r}' \in V} (x'_i)^2 dm \right) \\ &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 I_{ii} + \frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{jj} - I_{ii} \right) \right). \end{aligned}$$

Alors que montrer

$$-\frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 dm = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 I_{ii}$$

est évident, montrons que

$$\frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \int_{\vec{r}' \in V} (x'_i)^2 dm = \frac{3}{2r^2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{jj} - I_{ii} \right).$$

Il suffit de montrer que $\int_{\vec{r}' \in V} x_i'^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{jj} - I_{ii}$. Si $i = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{jj} - I_{11} &= \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22} + I_{33}) - I_{11} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} (x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_1)^2 + (x'_3)^2 + (x'_1)^2 + (x'_2)^2 dm \\ &\quad - \int_{\vec{r}' \in V} (x'_2)^2 + (x'_3)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vec{r}' \in V} 2(x'_1)^2 + 2(x'_2)^2 + 2(x'_3)^2 - 2(x'_2)^2 - 2(x'_3)^2 dm \\ &= \int_{\vec{r}' \in V} (x'_1)^2 dm. \end{aligned}$$

Ce calcul est évidemment aussi valable pour $i = 2$ et $i = 3$. Nous réécrivons le potentiel U_2 en fonction des axes principaux d'inertie :

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{A+B+C}{4} + \frac{3}{2r^2} \left\{ x^2 \left(\frac{A+B+C}{2} - A \right) + y^2 \left(\frac{A+B+C}{2} - B \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z^2 \left(\frac{A+B+C}{2} - C \right) \right\} \right) \\ &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(-\frac{A+B+C}{4} + \frac{3}{2r^2} r^2 \frac{A+B+C}{2} - \frac{3}{2r^2} (x^2 A + y^2 B + z^2 C) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{3}{2r^2} (x^2 A + y^2 B + z^2 C) \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{2A+C}{2} - \frac{3}{2r^2} ((x^2 + y^2)A + z^2 C) \right),
\end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, $A = B$, en raison de la symétrie de révolution autour de \vec{e}_z .

Nous revenons maintenant aux coordonnées polaires, où λ est la longitude et θ est la colatitude, comme défini précédemment. Rappelons les coordonnées polaires : $\forall (x, y, z)$, nous avons

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \lambda, \\ y &= r \sin \theta \sin \lambda, \\ z &= r \cos \theta. \end{cases}$$

Dès lors, $A(x^2 + y^2) = Ar^2 \sin^2 \theta$, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
U_2 &= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{2A+C}{2} - \frac{3}{2r^2} (Ar^2 \sin^2 \theta + Cr^2 \cos^2 \theta) \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{2A+C}{2} - \frac{3}{2} (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{2A+C}{2} - \frac{3}{2} ((C-A) \cos^2 \theta + A) \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} \left(\frac{C-A}{2} - \frac{3}{2} (C-A) \cos^2 \theta \right) \\
&= -\frac{k^2 m_1}{r^3} (C-A) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) \\
&= \frac{k^2 m_1}{r^3} (C-A) \mathcal{P}_2(\cos \theta).
\end{aligned}$$

Nous introduisons la constante J_2 , constante reliée à l'aplatissement du corps central. La définition de ce coefficient est

$$J_2 = \frac{C-A}{m_0 R_0^2}.$$

L'expression de U_2 est finalement

$$U_2 = \frac{k^2 m_0 m_1}{r} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 J_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta).$$

Après avoir développé les potentiels U_0 , U_1 et U_2 , il est possible de généraliser l'écriture de ces potentiels pour un n quelconque :

$$U_n = \frac{k^2 m_0 m_1}{r} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_n \mathcal{P}_n(\cos \theta).$$

Remarquons que U_n est indépendant de la longitude λ . Ceci est dû à la symétrie de

révolution autour de l'axe de rotation.

Les coefficients J_n sont des constantes (sans dimension) qui indiquent la distribution de la masse du corps déformé. Ils sont soit directement issus de l'observation soit donnés par l'intégrale

$$J_n = \frac{2\pi}{m_0 R_0^n} \int_0^{R_0} \int_{-1}^1 r^n \mathcal{P}_n(\nu) \rho(r, \nu) r^2 d\nu dr,$$

où $\nu = \cos \theta$ et $\rho(r, \nu)$ est la densité intérieure du corps.

Les J_n sont représentatifs de la forme du corps. Le coefficient J_2 représente l'aplatissement du corps aux pôles alors que J_3 représente la symétrie/ anti-symétrie du corps par rapport à son équateur. Le coefficient J_4 , quant à lui, représente la non-circularité de l'équateur. Remarquons que, puisque $\mathcal{P}_n(\cdot)$ est une fonction impaire lorsque n est impaire, $J_n = 0$ pour un corps dont les hémisphères nord et sud sont symétriques, ce qui est le cas ici en raison de la symétrie par rapport au plan équatorial. Pour calculer les J_n , il faut entre autres connaître la densité intérieure du corps $\rho(r, \nu)$. Dans ce travail, nous nous limitons à J_2 , au vu des ordres de grandeur des coefficients. En effet, on peut montrer que

$$J_n \propto q^{n/2}, \text{ avec } q \ll 1.$$

Même pour le Soleil, la valeur de J_2 reste peu certaine. Elle varie de 10^{-5} à 10^{-7} .

Après tous ces calculs, nous sommes en mesure de donner le développement en *harmoniques sphériques*⁶ du potentiel gravitationnel :

$$\begin{aligned} U_{\text{grav}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^2 m_0 m_1}{r} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_n \mathcal{P}_n(\cos \theta) \\ &= -\frac{k^2 m_0 m_1}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_n \mathcal{P}_n(\cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$= \underbrace{-\frac{k^2 m_0 m_1}{r}}_{U_{\text{body}}} + \underbrace{\frac{k^2 m_0 m_1}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_n \mathcal{P}_n(\cos \theta)}_{U_{\text{spin}}}, \quad (4.11)$$

où R_0 est le rayon de la sphère englobant le corps, généralement la valeur du rayon équatoriale de m_0 , et θ est la colatitute.

Après avoir éliminé les termes impairs et expliqué l'absence du terme $n = 1$, nous nous limitons au terme dominant $n = 2$ dans l'expression (4.10), comme expliqué ci-dessus.

6. Un rappel concernant les harmoniques sphériques ainsi que quelques-unes de leurs propriétés sont données dans l'Annexe C.

Le potentiel (4.10) est le potentiel que nous cherchions à obtenir à la fin des trois étapes. Dans le cas d'un système binaire, la composante hamiltonienne à ajouter pour prendre en compte l'effet de l'aplatissement de l'étoile primaire dû à sa rotation, $\mathcal{H}_{\text{spin}}$, est ⁷ (développement limité à J_2) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{spin}} &= \frac{\mu\beta}{r} \left(\left(\frac{R_0}{r} \right)^2 J_2 \mathcal{P}_2 \cos \theta \right) \\ &= \frac{\mu\beta}{r^3} J_2 R_0^2 \left(\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right).\end{aligned}$$

Pour un système coplanaire dans lequel le corps m_1 est en révolution dans le plan équatorial de l'étoile primaire ($\theta = 90^\circ$), la composante hamiltonienne se simplifie en

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = -\frac{\mu\beta}{2r^3} J_2 R_0^2. \quad (4.12)$$

De façon à ne plus voir apparaître J_2 dans la composante hamiltonienne, nous introduisons le *nombre de Love* k_L et nous obtenons

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = -\frac{1}{6} \beta R_0^5 \left(1 + \frac{m_1}{m_0} \right) k_L \Omega^2 \frac{1}{r^3}, \quad (4.13)$$

où la définition du nombre de Love est

$$k_L = \frac{3J_2}{q}, \quad (4.14)$$

avec q comme défini précédemment en (4.7) :

$$q = \frac{\Omega^2 R_0^3}{k^2 m_0}.$$

Les nombres de Love sont trois paramètres h_L , k_L et l_L sans dimension qui mesurent la rigidité d'un corps et sa propension à changer de forme suite à sa rotation et à l'effet de marée. Les nombres h_L et k_L ont été introduits par A. E. H. Love tandis que le troisième nombre l_L a été introduit par T. Shida. Si le corps est rigide alors $h_L = k_L = l_L = 0$.

Pour la Terre, un corps élastique, nous avons par exemple ⁸

$$0.304 \leq k_L \leq 0.312.$$

En combinant les définitions (4.7) et (4.14), nous trouvons :

$$J_2 = \frac{1}{3} k_L \Omega^2 R_0^3 \frac{1}{k^2 m_0}, \quad (4.15)$$

7. La première partie de l'équation (4.11) représentant le potentiel de gravitation du problème non perturbé est omise puisqu'elle a déjà été prise en compte dans $\mathcal{H}_{\text{octu}}$.

8. Ces informations proviennent de Wolfram Science [52]. Plus de détails sont également disponibles sur le site de l'Université de Copenhague [44].

J_2 est dès lors de l'ordre de Ω^2 .

Alors que la vitesse de rotation Ω peut être calculée ou au moins estimée, le nombre de Love k_L est plus difficile à connaître. Dans la suite de nos calculs, nous adoptons la valeur usuelle $k_L = 0.02$, comme dans l'article de Migaszewski et Gozdziewski [24]. Ainsi, une fois que nous aurons connaissance de la valeur de Ω , nous pourrons donner la valeur de J_2 . La vitesse de rotation dépend de plusieurs paramètres, et notamment de l'âge de l'étoile concernée. Les étoiles très jeunes, qui ne sont pas encore dans la séquence principale ont une période de l'ordre d'une journée terrestre, pour les étoiles semblables au Soleil. Elles ont donc une grande vitesse de rotation et sont fortement aplaties. La vitesse de rotation d'une étoile de cent millions d'années dont la période est un jour est

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.2722 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s},$$

et⁹ $f \propto \Omega^2$.

Au contraire, des étoiles âgées de huit milliards d'années ont une grande période de rotation, de l'ordre de quarante jours, et donc une plus petite vitesse de rotation :

$$\Omega = \frac{2\pi}{40 \cdot 24 \cdot 3600} = 1.8181 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s},$$

et dès lors un plus petit aplatissement.

L'aplatissement des étoiles dépend donc de leur âge, et varie tout au long de leur vie. Cependant, pour notre étude, nous pouvons considérer une valeur constante puisque les échelles de temps considérées seront bien moins importantes que la durée de vie d'une étoile.

4.1.2 Moyennisation de la composante hamiltonienne $\mathcal{H}_{\text{spin}}$

Une fois la composante hamiltonienne $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ obtenue, nous la moyennons par rapport aux courtes périodes, en suivant le même procédé que pour la composante hamiltonienne représentant les effets non relativistes. Concrètement, nous moyennons l'équation (4.13) par rapport à l'anomalie moyenne M_1 relative au corps m_1 . Pour plus de clarté, nous omettons, jusqu'à la fin de ce chapitre, l'indice 1.

La moyennisation de $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ est donc :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle = -\frac{1}{6} \beta R_0^5 \left(1 + \frac{m_1}{m_0} \right) k_L \Omega^2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle. \quad (4.16)$$

9. En considérant le corps comme non-sphérique, la définition (*cfr* Murray et Dermott [26]) de l'aplatissement devient

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q.$$

Pour rappel, $f = \frac{q}{2}$ dans le cas d'un corps sphérique. Dès lors, en remplaçant par les définitions respectives de J_2 et q :

$$f = \frac{3}{4} \frac{k_L \Omega^2 R_0^3}{k^2 m_0} + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 R_0^3}{k^2 m_0} = \frac{\Omega^2 R_0^3}{k^2 m_0} \left(\frac{3}{4} k_L + \frac{1}{2} \right),$$

ce qui permet de dire que $f \propto \Omega^2$.

Nous devons donc calculer $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$. Pour ce faire, nous montrons¹⁰ que $\forall l > 1$

$$\left\langle \frac{1}{r^l} \right\rangle = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^l(1-e^2)^{l-1}} \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \langle \cos^s f \rangle, \quad (4.17)$$

où

$$\langle \cos^s f \rangle = \begin{cases} \frac{2^s \pi}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2})^2 \Gamma(s+1)} & \text{si } s \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } s \text{ est impair,} \end{cases} \quad (4.18)$$

et C_{l-2}^s sont les coefficients binomiaux¹¹. L'Annexe D offre un rappel concernant la *fonction* Γ qui apparaît dans l'équation (4.18).

En effet,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^l} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^l} dM \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos f)^l}{a^l(1-e^2)^l} dM. \end{aligned}$$

Nous effectuons le changement de variables de M vers f :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^l} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos f)^l}{a^l(1-e^2)^l} \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos f)^2} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^l(1-e^2)^{l-\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (1+e \cos f)^{l-2} df. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous appliquons le binôme de Newton à $(1+e \cos f)^{l-2}$. Pour rappel, la formule du binôme de Newton est :

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad (x+y)^l = \sum_{s=0}^l C_l^s x^{l-s} y^s.$$

Appliquée à $(1+e \cos f)^{l-2}$ ($l > 1$), nous obtenons

$$(1+e \cos f)^{l-2} = \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s 1^{l-2-s} (e \cos f)^s = \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \cos^s f. \quad (4.20)$$

10. Cette assertion est issue de Migaszewski et Gozdziwski [24]. Celle-ci étant peu intuitive, nous la vérifions en détail avant de l'utiliser.

11. La définition des coefficients binomiaux est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nous remplaçons l'expression (4.20) dans l'intégrale (4.19) et nous avons alors

$$\left\langle \frac{1}{r^l} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^l (1 - e^2)^{l-\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \cos^s f df.$$

L'intégrale étant linéaire, nous intervertissons la somme et l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^l} \right\rangle &= \frac{1}{a^l (1 - e^2)^{l-\frac{3}{2}}} \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^s f df \\ &= \frac{1}{a^l (1 - e^2)^{l-\frac{3}{2}}} \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \langle \cos^s f \rangle \\ &= \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^l (1 - e^2)^{l-1}} \sum_{s=0}^{l-2} C_{l-2}^s e^s \langle \cos^s f \rangle, \end{aligned}$$

qui est l'expression (4.17) que nous désirions montrer.

Avant de pouvoir moyenner les composantes hamiltoniennes, il reste à calculer la valeur de $\langle \cos^s f \rangle$ en fonction de s (équation (4.18)). Graphiquement, nous pouvons voir que

$$\langle \cos^s f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^s x dx = 0$$

si s est impair. Calculons maintenant $\langle \cos^s f \rangle$ lorsque s est pair. Pour y parvenir, nous partons de l'égalité (4.21) (issue de [16], page 369, 3.62) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s x dx = 2^{s-1} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right). \quad (4.21)$$

La fonction $B(\cdot, \cdot)$ est aussi donnée dans cet ouvrage (8.38, page 950) :

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Donc, nous avons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s x dx = 2^{s-1} \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})^2}{\Gamma(s+1)}.$$

Dans le cas où s est pair, nous avons ¹²

$$\begin{aligned}
\langle \cos^s f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^s f \, df \\
&= \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s f \, df \\
&= \frac{2}{\pi} \left(2^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\Gamma(s+1)} \right) \\
&= \frac{2^s}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)} (-1)^{\frac{s}{2}} \right)^2 \frac{1}{\Gamma(s+1)} \right\} \\
&= 2^s \pi (-1)^s \frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)\right)^2 \Gamma(s+1)},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

ce qui est bine l'équation (4.18).

Enfin, en appliquant (4.17) à $l = 3$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3(1-e^2)^2} \sum_{s=0}^1 C_1^s e^s \langle \cos^s f \rangle \\
&= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3(1-e^2)^2} (C_1^0 e^0 \langle \cos^0 f \rangle + C_1^1 e^1 \langle \cos f \rangle) \\
&= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3(1-e^2)^2} \\
&= \frac{1}{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

La composante hamiltonienne moyennée (4.16) devient alors

$$\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle = -\frac{1}{6a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \beta R_0^5 \left(1 + \frac{m_1}{m_0} \right) k_L \Omega^2. \tag{4.23}$$

12. L'égalité (4.22) s'obtient grâce à l'ouvrage [16] (égalités 8.339) :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi},$$

où $n \in \mathbb{N}$. Dès lors,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1}{\frac{4^n n!}{(2n)! \sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\frac{4^n n!}{(2n)! \sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{(-1)^n \sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \frac{1}{(-1)^n \pi}} = \frac{(-1)^n \pi}{\frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}} = \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}.$$

Nous obtenons l'égalité (4.22) en remplaçant n par $\frac{s}{2}$. Remarquons que s est pair, ce qui implique que $\frac{s}{2}$ est un nombre entier. On peut donc appliquer les égalités 8.339 à $\frac{s}{2}$.

Nous exprimons maintenant $\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle$ par rapport aux éléments de Delaunay :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle = - \frac{\beta^7 \mu^3 k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{6L^3 G^3}. \quad (4.24)$$

De cette composante hamiltonienne, nous pouvons calculer la variation de la longitude du périastre, $g_{\text{spin}} = \varpi_{\text{spin}}$ dans le cas d'un système coplanaire. Pour cela, il suffit de dériver $\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle$ par rapport à G .

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\text{spin}} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle}{\partial G} \\ &= \frac{\beta^7 \mu^3 k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{2L^3 G^4}. \end{aligned}$$

A nouveau, seul l'argument du périastre sera affecté par la correction due à la rotation de l'étoile. Il s'agit ici, comme pour les corrections relativistes, d'une avance du périastre, dû au signe positif de \dot{g}_{spin} .

4.2 Bourrelet de marée

Cette section considère la déformation du corps primaire causée par la présence d'une masse ponctuelle à proximité de celui-ci. En effet, comme nous l'avons vu à la section précédente, les corps ne sont pas complètement rigides. De ce fait, la présence d'un corps à proximité du corps central va également le déformer, à l'instar de la marée que l'on connaît sur Terre. Un bref rappel concernant les marées a été présenté au Chapitre 1, section 1.6.1.

Nous gardons la même stratégie que précédemment. Dans un premier temps, nous allons montrer comment nous obtenons la composante hamiltonienne liée aux déformations de marée. Une fois cette dernière obtenue, nous effectuerons la moyennisation.

4.2.1 Les effets de marée

Dans cette sous-section¹³, nous expliquons comment on modélise l'effet de marée et comment se traduit cet effet dans la composante hamiltonienne. Pour déterminer cette composante hamiltonienne \mathcal{H}_{TB} due à l'effet de marée, nous procédons en deux étapes :

1. Nous calculons le potentiel de marée qu'exerce le corps ponctuel m_1 sur le corps homogène, sphérique, m_0 .
2. Nous calculons la forme que prend m_0 suite à la présence de m_1 . Nous donnons ensuite le potentiel de marée qu'exerce m_0 déformée sur m_1 .

Enfin, nous discuterons de la forme et de la structure interne de m_0 et expliquerons les hypothèses de simplification que nous avons faites concernant ce corps.

13. Les explications de l'effet de marée proviennent principalement de l'ouvrage de Murray et Dermott [26].

1. Dans la première étape, nous considérons m_0 , un corps sphérique de rayon R_0 autour duquel orbite le corps ponctuel m_1 . Nous considérons ces deux corps dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, déjà défini dans la section 4.1.1. Soit $P(x, y, z)$, un point de la surface de m_0 (voir figure 4.3). Le vecteur position de P par rapport à O est noté \vec{R}_0 et la distance entre ces deux points est le rayon R_0 . Le vecteur position de m_1 par rapport à O est \vec{r} , de norme r . L'angle entre \vec{R}_0 et \vec{r} est ψ . Enfin, nous notons δ la distance entre P et m_1 :

$$\delta = \sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos \psi}.$$

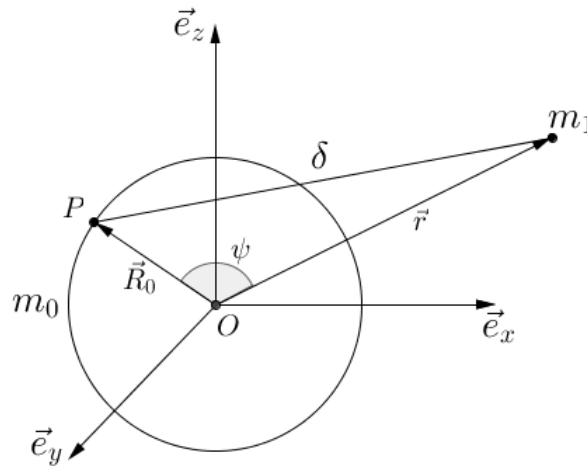


FIGURE 4.3 – Représentation des vecteurs positions \vec{r} et \vec{R}_0 , de la distance δ , du point P , de l'angle ψ et des corps m_0 et m_1

Notre but est de calculer le potentiel de gravitation U_{grav} en P dû à la masse ponctuelle m_1 . Ce potentiel est donné par

$$U_{\text{grav}} = -\frac{k^2 m_1}{\delta},$$

où

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi),$$

comme nous l'avons déjà calculé dans la section 4.1.1, équation (4.9).

Nous limitons notre développement à $n = 2$ car $R_0 \ll r$. Dès lors,

$$\begin{aligned} U_{\text{grav}} &= \frac{-k^2 m_1}{r} \sum_{n=0}^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) \\ &= \frac{-k^2 m_1}{r} \left(\underbrace{1}_{=U_0} + \underbrace{\frac{R_0}{r} \mathcal{P}_1(\cos \psi)}_{=U_1} + \underbrace{\frac{R_0^2}{r^2} \mathcal{P}_2(\cos \psi)}_{U_2} \right). \end{aligned}$$

Le premier terme est une constante et par conséquent, puisque $\frac{F}{m_0} = -\vec{\nabla}V$, il ne produit aucune force sur la planète. Le second terme U_1 produit une force sur la particule au point P qui lui permet de se déplacer sur un cercle. Le terme U_2 est, quant à lui, le terme dominant de l'effet de marée. Nous pouvons réécrire U_2 :

$$U_2 = \frac{-k^2 m_1}{r^3} R_0^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1).$$

Notons que plus m_1 est loin de m_0 (et donc plus r est grand), moins U_2 aura de l'importance.

On introduit g , l'accélération gravitationnelle de m_0 non déformé, et ζ :

$$\begin{cases} g &= \frac{k^2 m_0}{R_0^2}, \\ \zeta &= R_0 \frac{m_1}{m_0} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3. \end{cases}$$

Alors que g ne dépend que des paramètres du corps m_0 , ζ dépend également de m_1 . Le potentiel de marée de m_1 sur m_0 , que nous noterons désormais U_{10} , devient avec ces nouveaux paramètres :

$$U_{10} = U_2 = -g\zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi).$$

Nous dirons que $\zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ est l'*amplitude de la marée à l'équilibre*.

Nous constatons que cette amplitude dépend de m_1 et de r , à travers ζ , et que la marée sera d'autant plus forte si m_1 est importante et r petit. Aussi, l'amplitude dépend de ψ au travers de $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$. Si $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$, alors $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ est maximum et l'amplitude de la marée à l'équilibre sera donc aussi à son maximum. Au contraire, $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ est minimal pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ ou $\psi = \frac{3\pi}{2}$. La déformation de m_0 n'est donc pas identique en tout point de sa surface. Un bourrelet de marée se forme dans la direction de m_0 , vers m_0 ($\psi = 0$) et à l'opposé de m_0 ($\psi = \pi$), déformant m_0 en une ellipsoïde (voir figure 4.4). La droite joignant m_1 à m_0 est un axe de symétrie des bourrelets de marée.

La marée à l'équilibre est une marée "instantanée". En effet, nous considérons dans ce chapitre que la déformation de m_0 due à la présence de m_1 est immédiate. Cette hypothèse d'instantanéité sera relaxée au Chapitre 6, où nous tiendrons alors compte du fait qu'un corps ne peut pas se déformer instantanément, ce qui entraîne que les bourrelets ne seront plus alignés avec la droite joignant le centre des deux corps.

2. La déformation due à la présence de m_1 rend le corps m_0 ellipsoïdale. Dans cette

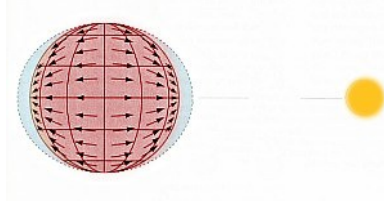


FIGURE 4.4 – Effet de marée subi par le premier corps (rouge) produit par le deuxième corps (jaune), figure issue de [17]

deuxième étape, il faut maintenant tenir compte de la forme de m_0 dans les calculs du potentiel U_{01} , le potentiel de la surface de m_0 sur m_1 .

En raison de la déformation, m_0 n'est plus sphérique. L'équation de sa surface est

$$r'(\theta') = R_0 + R_0\epsilon\mathcal{P}_2(\cos\theta'). \quad (4.25)$$

La déformation par rapport à la sphère de rayon R_0 est $R_0\epsilon\mathcal{P}_2(\cos\theta')$. Le paramètre ϵ est tel que $\epsilon \ll 1$. Dès lors, m_0 reste quasiment sphérique. L'angle θ est la colatitute mesurée cette fois par rapport à l'axe de symétrie des bourrelets de marée. Dans la section précédente, nous mesurons cet angle à partir de l'axe vertical. U_{10} étant une harmonique sphérique d'ordre 2, la déformation de m_0 doit être proportionnelle au potentiel qui l'a créée. Ce choix permet de rendre la surface de m_0 équipotentielle. Notre but est de calculer le potentiel en m_1 créé par l'élément de masse en un point de la surface (d'équation (4.25)) de m_0 .

Nous considérons un point P' à la surface de m_0 . Les coordonnées sphériques de ce point sont (r', θ', ϕ') . Le vecteur position de P' par rapport à O est \vec{r}' , de norme r' . Le corps m_1 est toujours considéré comme étant une masse ponctuelle. Son vecteur position est donné par \vec{r} , comme illustré à la figure 4.5. Cette figure montre également ψ , l'angle entre \vec{r} et \vec{r}' .

Comme dans l'étape précédente, δ est la distance entre \vec{r}' et \vec{r} . Son expression est

$$\delta = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\psi},$$

et donc comme précédemment,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\psi}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos\psi) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire la dernière égalité car $\frac{R_0}{r} \ll 1$.

Nous nous limitons, encore une fois, à $n \leq 2$:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos\psi) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.26)$$

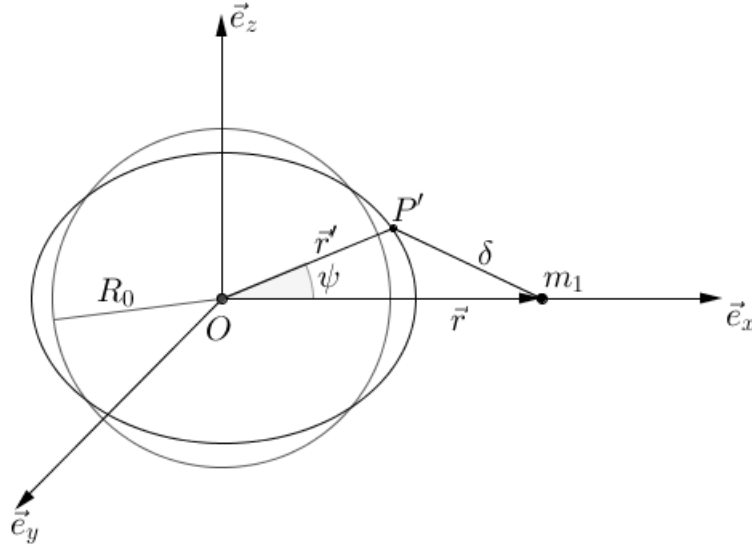


FIGURE 4.5 – Représentation des vecteurs positions \vec{r} et \vec{r}' , de la distance δ , du point P' , de l'angle ψ , de rayon moyen R_0 et des corps m_0 et m_1

Le potentiel dû à m_0 subi par m_1 est la somme d'un potentiel $U_{\text{sphère}}$ et d'un potentiel non central U_{01} , créé par la surface de m_0 d'équation (4.25). Nous nous intéressons dans la suite uniquement à U_{10} .

Le potentiel non central par unité de masse est

$$U_{01} = -k^2 \int \frac{dm}{\delta}. \quad (4.27)$$

Notre tâche est maintenant de réécrire l'équation (4.27).

L'élément de masse au point P' s'écrit

$$dm = \rho R_0^3 \epsilon \mathcal{P}_2(\mu') d\mu' d\phi', \quad (4.28)$$

où ρ est la densité dans la couche déformée et $\mu' = \cos \theta'$.

On remplace (4.26) et (4.28) dans l'expression (4.27) pour obtenir

$$\begin{aligned} U_{01} &= -k^2 \int \frac{dm}{\delta} \\ &= -k^2 \rho \epsilon R_0^3 \sum_{n=0}^2 \frac{1}{r} \frac{R_0^n}{r^n} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_n(\cos \psi) \mathcal{P}_2(\mu') d\mu' d\phi' \\ &= -k^2 \rho \epsilon R_0^3 \frac{1}{r} \frac{R_0^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \mathcal{P}_2(\mu') d\mu' d\phi', \end{aligned}$$

où nous ne gardons que le terme $n = 2$, d'après la propriété (C.5) des harmoniques sphériques de l'Annexe C. Enfin, nous utilisons la propriété (C.6) de l'Annexe C

pour obtenir :

$$U_{01} = -\frac{4\pi}{5}k^2\rho\epsilon\frac{R_0^5}{r^3}\mathcal{P}_2(\cos\theta). \quad (4.29)$$

On introduit k_L , le nombre de Love, déjà cité dans la section précédente. Il est défini par

$$k_L = \frac{3/2}{1 + \tilde{\mu}} = \frac{3}{5} \frac{R_0\epsilon}{\zeta}, \quad (4.30)$$

où $\tilde{\mu}$ est la rigidité effective du corps m_0 et ζ a été introduit à l'étape précédente. Nous discutons de k_L et de l'égalité (4.30) à la fin de la section.

En introduisant k_L , le potentiel non central créé par la surface définie en (4.25) sur m_1 devient

$$\begin{aligned} U_{01} &= -\frac{4\pi}{3}k^2\rho k_L\zeta\frac{R_0^4}{r^3}\mathcal{P}_2(\cos\theta) \\ &= -g\zeta k_L\frac{R_0^3}{r^3}\mathcal{P}_2(\cos\theta). \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue grâce à la relation :

$$g = \frac{k^2}{R_0^2}m_0 = \frac{k^2}{R_0^2}\rho\frac{4\pi}{3}R_0^3 = \frac{4\pi k^2}{3}\rho R_0.$$

Finalement, de façon à pouvoir comparer cette expression avec celles obtenues dans les articles de Nagasawa et Lin [27] et Fabrycky et Tremaine [12], nous réécrivons U_{01} en utilisant les définitions de g et ζ :

$$\begin{aligned} U_{01} &= -\frac{k^2 m_0}{R_0^2} m_1 \frac{R_0^4}{m_0 r^3} k_L \frac{R_0^3}{r^3} \mathcal{P}_2(\cos\theta) \\ &= -k^2 m_1 \frac{R_0^5}{r^6} k_L \mathcal{P}_2(\cos\theta). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Discutons à présent des caractéristiques physiques de m_0 . Lorsque m_0 est un corps liquide homogène incompressible¹⁴ de densité ρ (et donc de rigidité μ nulle), le nombre de Love est défini par

$$k_L = \frac{3}{2}$$

pour un tel corps. Pour un solide homogène incompressible de rigidité effective $\tilde{\mu}$, k_L s'écrit

$$k_L = \frac{3/2}{1 + \tilde{\mu}},$$

et la définition de la rigidité effective est $\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g R_0}$.

Nous remarquons que plus le corps est rigide (plus μ est grand), plus k_L sera petit.

Nous faisons l'hypothèse de la marée à l'équilibre, ce qui signifie que la force de gravitation (qui tend à faire effondrer l'étoile sur elle-même) et la force de pression (qui tend

14. La densité est constante pour un corps incompressible.

à faire dilater l'étoile) se compensent. Aussi, nous dirons que le corps est en équilibre hydrostatique (ce qui est bien respecté quand $\mu = 0$). L'équilibre hydrostatique implique que la surface de m_0 est équipotentielle. Cette hypothèse permet de déduire que le nombre de Love peut désormais s'écrire tel que

$$k_L = \frac{R_0 \epsilon}{\zeta} - 1,$$

et donc sous l'hypothèse de la marée à l'équilibre ($\mu = 0$)

$$\frac{3}{2} = \frac{R_0 \epsilon}{\zeta} - 1 \Leftrightarrow \frac{R_0 \epsilon}{\zeta} = \frac{5}{2}.$$

Cette dernière égalité met en évidence une relation entre l'amplitude de la déformation et ζ . Dès lors,

$$\frac{R_0 \epsilon}{\zeta} = \frac{5}{2} \frac{3}{3} = \frac{5}{3} k_L \Leftrightarrow k_L = \frac{3}{5} \frac{R_0 \epsilon}{\zeta},$$

qui est l'expression (4.30) que nous avons utilisée pour simplifier le potentiel U_{01} .

De même, dans le cas où $\tilde{\mu} \neq 0$, alors l'amplitude de la déformation est

$$\frac{R_0 \epsilon}{\zeta} = \frac{5/2}{1 + \tilde{\mu}}.$$

Après ces remarques concernant la structure du corps central, nous donnons la composante hamiltonienne liée à l'effet de marée (équation (4.31)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{TB}} &= m_1 U_{10} \\ &= -\beta R_0^5 k^2 m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) k_L \frac{1}{r^6}, \end{aligned}$$

que nous allons maintenant moyenner. Notons que nous étudions un système où le corps m_1 se situe dans le plan équatorial de m_0 . Dès lors, nous choisissons $\theta = 0$. En effet, cet angle est maintenant mesuré à partir de l'axe de symétrie des bourrelets de marée. Le polynôme de Legendre $\mathcal{P}_2(\cos \theta)$ est donc égal à 1.

4.2.2 Moyennisation de la composante hamiltonienne \mathcal{H}_{TB}

La composante hamiltonienne liée à l'effet de marée moyennée s'obtient ainsi :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle = -\beta R_0^5 k^2 m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) k_L \left\langle \frac{1}{r^6} \right\rangle.$$

Nous calculons $\langle \frac{1}{r^6} \rangle$ grâce à l'assertion (4.18) :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r^6} \right\rangle &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^6(1-e^2)^5} \sum_{s=0}^4 C_4^s e^s \langle \cos^s f \rangle \\
&= \frac{1}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} [C_4^0 e^0 \langle \cos^0 f \rangle + C_4^2 e^2 \langle \cos^2 f \rangle + C_4^4 e^4 \langle \cos^4 f \rangle] \\
&= \frac{1}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} \left[\frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2})^2 \Gamma(1)} + 6e^2 \frac{2^2 \pi}{\Gamma(-\frac{1}{2})^2 \Gamma(3)} + e^4 \frac{2^4 \pi}{\Gamma(-\frac{3}{2})^2 \Gamma(5)} \right] \\
&= \frac{1}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} (1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4), \tag{4.32}
\end{aligned}$$

où, pour obtenir l'égalité (4.32), nous avons utilisé que

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}, & \Gamma(1) &= 1, \\
\Gamma(-\tfrac{1}{2}) &= -2\sqrt{\pi}, & \Gamma(3) &= 2! = 2, \\
\Gamma(-\tfrac{3}{2}) &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} & \Gamma(5) &= 4! = 24.
\end{aligned}$$

La composante hamiltonienne \mathcal{H}_{TB} moyennée s'écrit donc

$$\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle = - \frac{\beta R_0^5 k^2 m_1 (1 + \frac{m_1}{m_0}) k_L}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} (1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4). \tag{4.33}$$

Nous écrivons maintenant cette composante hamiltonienne dans les variables de Delaunay. Nous avons alors l'expression suivante :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle = \frac{15\beta^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu^7}{8L^7 G^9 m_0} \left(-\frac{1}{5}G^4 + 2L^2 G^2 - \frac{7}{3}L^4 \right). \tag{4.34}$$

Une fois l'équation écrite dans les variables de Delaunay, nous pouvons calculer $\dot{g}_{\text{TB}} = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle}{\partial G}$. Pour ce faire, nous dérivons l'équation (4.34) par rapport à G . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{g}_{\text{TB}} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle}{\partial G} \\
&= \frac{\partial}{\partial G} \left\{ \frac{15\beta^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu^7}{8L^7 G^9 m_0} \left(-\frac{1}{5}G^4 + 2L^2 G^2 - \frac{7}{3}L^4 \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial G} \left\{ \frac{15\beta^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu^7}{8L^7 m_0} \left(-\frac{1}{5}G^{-5} + 2L^2 G^{-7} - \frac{7}{3}L^4 G^{-9} \right) \right\} \\
&= \frac{15\beta^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu^7}{8L^7 m_0} (G^{-6} - 14L^2 G^{-8} + 21L^4 G^{-10}) \\
&= \frac{15\beta^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu^7}{8L^7 G^{10} m_0} (G^4 - 14L^2 G^2 + 21L^4).
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\dot{g}_{\text{TB}} &= \frac{15\beta^{13}k_LR_0^5(G^4 - 14L^2G^2 + 21L^4)m_1\mu^7}{8G^{10}L^7m_0} \\ &= \frac{15k_LR_0^5m_1\sqrt{\mu}}{8a^{13/2}m_0} \frac{8 + 12e^2 + e^4}{(1 - e^2)^5}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Cette expression est toujours positive, comme \dot{g}_{GR} , c'est pourquoi, elle implique aussi une précession du péricentre.

4.3 Comparaison avec d'autres articles

4.3.1 Comparaison des expressions liées au spin

Nous comparons les trois articles de Migaszewski et Gozdziwski [24], Nagasawa et Lin [27] et Fabrycky et Tremaine [12]. Les composantes hamiltoniennes non-moyennée et moyennée ainsi que la variation de l'argument du périastre sont données dans ces trois articles, mais avec des notations différentes. Nous synthétisons toutes les expressions dans la table 4.1.

Tout d'abord, nous remarquons que les expressions sont similaires dans l'article de Nagasawa et Lin [27] et dans notre travail basé sur Migaszewski et Gozdziwski [24].

Concernant l'article de Fabrycky et Tremaine¹⁵ [12], les expressions semblent indiquer à première vue une différence d'un facteur $\frac{1}{2}$. Il n'en est rien car, alors que [27] et [24] utilisent le nombre de Love (noté k_* et k_L respectivement), Fabrycky emploie la constante du mouvement apsidal (notée k_1 pour le corps m_1 , à savoir le corps primaire). Ce nombre est égal à la moitié du nombre de Love (*i.e.* $2k_1 = k_L$). Notons également que nous étudions la rotation du corps central, noté m_1 dans [12], alors que l'expression (30) de [12] décrit la rotation du deuxième corps, noté m_2 dans ce même article. Nous adaptons donc l'expression (30) pour qu'il s'agisse de la rotation de m_1 .

En conclusion, les expressions liées au spin des trois articles sont identiques.

15. Dans [12], nous ne prenons pas en compte la rotation du deuxième corps, noté m_2 .

Spin	Nagasawa et Lin	Fabrycky et Tremaine	Migaszewski et Goździewski
$\mathcal{H}_{\text{spin}}$	$-\frac{1}{6}R_{\star}^5 M_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_{\star}}\right) k_{\star} \Omega_{\star}^2 \frac{1}{r^3}$ <p>Issue de l'équation (9) de [27]</p>	$-\frac{1}{3}k_1 m_2 \Omega_1^2 R_1^5 \frac{1}{r_{in}^6}$ <p>Equation (30) de [12]</p>	$-\frac{\beta R_0^5 \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) k_L \Omega^2}{6r^3}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle$	$-\frac{1}{6}R_{\star}^5 M_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_{\star}}\right) k_{\star} \Omega_{\star}^2 \frac{1}{a_1^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{1}{3} \frac{m_2 k_1 R_1^5 \Omega_1^2}{a_{in}^3 (1-e_{in}^2)^{\frac{3}{2}}}$ <p>Equation (31) de [12]</p>	$\frac{-\beta k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{6a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= -\frac{\beta^7 \mu^3 k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{6L^3 G^3}$
\dot{g}_{spin}	$\frac{1}{2} n_1 \frac{k_{\star}}{(1-e^2)^2} \left(\frac{\Omega_{\star}}{n_1}\right)^2 M_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_{\star}}\right) \left(\frac{R_{\star}}{a_1}\right)^5$ <p>Equation (10) de [27]</p>	$n \frac{k_1}{(1-e_{in}^2)^2} \left(\frac{\Omega_1}{n}\right)^2 m_2 \left(\frac{R_1}{a_{in}}\right)^5$ <p>Equation (32) de [12]</p>	$\frac{\beta^7 \mu^3 k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{2L^3 G^4}$ $= \frac{1}{2} n \frac{k_L}{(1-e^2)^2} \left(\frac{\Omega}{n}\right)^2 \beta \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) \left(\frac{R_0}{a}\right)^5$

TABLE 4.1 – Comparaison des corrections liées au spin des articles de Nagasawa et Lin [27], Fabrycky et Tremaine [12], et Migaszewski et Goździewski [24]. Les notations de Nagasawa et Lin [27] sont les suivantes : $G = k^2$, $M_{\star} = m_0$, $M_1 = m_1$, $R_{\star} = R_0$, $\Omega_{\star} = \Omega$ et $k_{\star} = k_L$. Les notations de Fabrycky et Tremaine [12] sont : $G = k^2$, $a_{in} = a_1$, $e_{in} = e_1$, $m_1 = m_0$, $m_2 = m_1$, $R_1 = R_0$, $\Omega_1 = \Omega$ et $k_1 = \frac{k_L}{2}$.

4.3.2 Comparaison des expressions de l'effet de marée

Le tableau 4.2 reprend les composantes hamiltoniennes de marée (TB) non-moyennée et moyennée ainsi que \dot{g}_{TB} tels que nous les retrouvons dans l'article de Nagasawa et Lin [27], l'article de Fabrycky et Tremaine [12] et dans notre travail basé sur Migaszewski et Goździewski [24].

Dans Fabrycky et Tremaine [12], nous considérons que la deuxième masse, m_2 , est ponctuelle. Dès lors, $R_2 = 0$, et seul le terme lié au corps central des équations (28) et (29) de [12] seront pris en compte.

A nouveau, toutes ces expressions sont identiques dans les trois articles.

TB	Nagasawa et Lin	Fabrycky et Tremaine	Migaszewski et Gozdziwski
\mathcal{H}_{TB}	$-2\frac{R_\star^5}{r_1^6}M_1\left(1+\frac{M_1}{M_\star}\right)k_\star GM_1$ Issue de l'équation (11) de [27]	$-Gm_2^2\frac{R_1^5}{r_{in}^6}k_1$ Equation (27) de [12]	$-\beta\frac{R_0^5}{r_6^6}k^2m_1\left(1+\frac{m_1}{m_0}\right)k_L$
$\langle\mathcal{H}_{\text{TB}}\rangle$	$-2R_\star^5M_1\left(1+\frac{M_1}{M_\star}\right)k_\star GM_1\frac{(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4)}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}$	$-\frac{Gm_2^2k_1R_1^5}{8a_{in}^6}\left(\frac{8+24e_{in}^2+3e_{in}^4}{(1-e_{in}^2)^{\frac{9}{2}}}\right)$ Equation (28) de [12]	$-\beta R_0^5k^2m_1\left(1+\frac{m_1}{m_0}\right)k_L\frac{1+3e^2+\frac{3}{8}e^4}{a^6(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}$ $=\frac{15\beta^{13}k_LR_0^5m_1\mu^7}{8L^7G^9m_0}\left(-\frac{1}{5}G^4+2L^2G^2-\frac{7}{3}L^4\right)$
\dot{g}_{TB}	$2R_\star^5\frac{1}{a_1^8n_1}M_1\left(1+\frac{M_1}{M_\star}\right)k_\star GM_1\frac{15(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4)}{(1-e^2)^5}$ $=2\frac{k_\star R_\star^5M_1\sqrt{G(M_\star+M_1)}}{a_1^{13/2}M_\star}\frac{15(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4)}{(1-e^2)^5}$	$\frac{15k_1R_1^5m_2\sqrt{G(m_1+m_2)}}{8a_{in}^{13/2}m_2}\left(\frac{8+12e_{in}^2+e_{in}^4}{(1-e_{in}^2)^5}\right)$ Equation (29) de [12]	$\frac{15\beta^{13}k_LR_0^5m_1\mu^7(G^4-14L^2G^2+21L^4)}{8G^{10}L^7m_0}$ $=\frac{15k_LR_0^5m_1\sqrt{\mu}}{8a^{13/2}m_0}\frac{8+12e^2+e^4}{(1-e^2)^5}$

TABLE 4.2 – Comparaison des corrections de marée des articles de Nagasawa et Lin [27], Fabrycky et Tremaine [12], et Migaszewski et Gozdziwski [24]. Les notations de Nagasawa et Lin [27] sont les suivantes : $G = k^2$, $M_\star = m_0$, $M_1 = m_1$, $R_\star = R_0$, $\Omega_\star = \Omega$ et $k_\star = k_L$. Les notations de Fabrycky et Tremaine [12] sont : $G = k^2$, $a_{in} = a_1$, $e_{in} = e_1$, $m_1 = m_0$, $m_2 = m_1$, $R_1 = R_0$, $\Omega_1 = \Omega$ et $k_1 = \frac{k_L}{2}$.

Chapitre 5

Résultats numériques

Le but de ce chapitre est de caractériser l'évolution des éléments orbitaux (*i.e.* les excentricités des deux orbites ainsi que les arguments des périastres g_1 et g_2) pour différentes configurations de système planétaire, en se focalisant sur l'impact à long terme des deux corrections apportées au modèle octupole dans les chapitres précédents. La première section de ce chapitre offre un bref rappel des équations que nous avons utilisé dans les intégrations numériques. Dans la deuxième section, nous tenterons de déterminer à quelle distance maximale du corps principal doit se trouver la deuxième masse pour que les corrections aient un effet notable. A cet effet, nous tracerons des courbes de niveau des trois composantes hamiltoniennes, où nous aurons la possibilité de comparer les valeurs des trois composantes hamiltoniennes pour plusieurs masses m_1 et demi-grands axes a_1 . Une fois la distance maximale déterminée, nous examinerons plus en profondeur plusieurs configuration de systèmes en montrant l'impact des corrections relativistes et de marée sur le mouvement séculaire des trois corps. Nous terminerons ce chapitre par montrer que l'excentricité influence peu la valeur des composantes hamiltoniennes.

5.1 Evolutions numériques des éléments orbitaux

Cette section donne une vue synthétique des différentes composantes formant l'Hamiltonien du problème avec corrections et introduites dans les chapitres précédents. Nous y reprenons également \dot{g}_1 et \dot{g}_2 , l'évolution des arguments des périastres ainsi que l'évolution des excentricités des deux orbites, \dot{e}_1 et \dot{e}_2 .

L'Hamiltonien octupole moyenné par rapport aux courtes périodes, dans les variables de Delaunay, discuté au Chapitre 2 est :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{oct u}} \rangle &= -\alpha^2 \frac{k^2 m_1 m_2 L_2^3}{16 a_2 G_2^3} \left[\left(2 + 3 \left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2} \right) \right) (3 \cos^2 i - 1) + 15 \left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2} \right) \sin^2 i \cos(2g_1) \right] \\ &\quad + \alpha^3 \frac{15 k^2 m_1 m_2 L_2^5}{64 a_2 G_2^5} \sqrt{1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}} \sqrt{1 - \frac{G_2^2}{L_2^2}} \left[A \cos \phi + 10 \frac{G_1^2}{L_1^2} \cos i \sin^2 i \sin g_1 \sin g_2 \right] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a_1}{a_2}, \\ A &= 7 - 3\frac{G_1^2}{L_1^2} - \frac{5}{2}\sin^2 iB, \\ B &= 7 - 5\frac{G_1^2}{L_1^2} - 7\left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}\right)\cos(2g_1), \\ \cos\phi &= -\cos g_1 \cos g_2 - \cos i \sin g_1 \sin g_2, \\ i &= i_1 + i_2.\end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à des systèmes coplanaires. Dès lors, $\cos i = 1$ et $\cos\phi = \cos(g_1 - g_2)$. La composante hamiltonienne octupole moyennée $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle$ se réduit alors à

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle = -\alpha^2 \frac{k^2 m_1 m_2 L_2^3}{8a_2 G_2^3} \left(2 + 3\left(1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}\right)\right) + \alpha^3 \frac{15k^2 m_1 m_2 L_2^5}{64a_2 G_2^5} \sqrt{1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}} \sqrt{1 - \frac{G_2^2}{L_2^2}} A \cos(g_1 - g_2).$$

Dans cette expression, seul l'angle $g_1 - g_2$ apparaît. Cette remarque sera utile dans l'analyse de l'évolution des systèmes, car cela signifie que les éléments orbitaux auront une période unique.

Par hypothèse, nous appliquons les corrections relativistes uniquement sur le corps m_1 , le plus proche de m_0 . Ainsi, la composante hamiltonienne représentant les corrections de la relativité générale est :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle = -\frac{3\mu_1^4 \beta_1^5}{c^2 L_1^3 G_1}. \quad (5.1)$$

La deuxième correction apportée à l'Hamiltonien est la correction due aux masses non ponctuelles et est reprise ci-dessous :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle = \underbrace{-\frac{\beta_1^7 \mu_1^3 k_L \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) R_0^5 \Omega^2}{6L_1^3 G_1^3}}_{=\langle \mathcal{H}_{\text{spin}} \rangle} + \underbrace{\frac{15\beta_1^{13} k_L R_0^5 m_1 \mu_1^7}{8L_1^7 G_1^9 m_0} \left(-\frac{1}{5}G_1^4 + 2L_1^2 G_1^2 - \frac{7}{3}L_1^4\right)}_{=\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle}. \quad (5.2)$$

L'Hamiltonien total du système, moyenné, noté $\langle \mathcal{H} \rangle$ dans la suite, est la somme de ces trois termes :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle.$$

Les équations du mouvement sont données par les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned}\dot{g}_i &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial G_i}, \\ \dot{G}_i &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial g_i}, i = 1, 2.\end{aligned}$$

Nous étudions l'évolution des excentricités e_1 et e_2 et des arguments des périastres g_1 et g_2 . Nous ré-exprimons tout d'abord l'évolution de e_i ($i = 1, 2$) :

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= \frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{dG_i}{dt} = -\frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial g_i}, \\ &= -\frac{\partial e_i}{\partial G_i} \left\{ \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial g_i} + \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle}{\partial g_i} + \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle}{\partial g_i} \right\}, i = 1, 2.\end{aligned}$$

Les composantes hamiltoniennes (5.1) et (5.2) ne dépendent que du moment G_1 . Elles sont indépendantes de g_1 , g_2 et G_2 . Seule l'évolution de g_1 sera ainsi affectée par les corrections relativistes et de marée :

$$\dot{e}_1 = -\frac{\partial e_1}{\partial G_1} \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial g_1}, \quad (5.3)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{\partial e_2}{\partial G_2} \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial g_2}, \quad (5.4)$$

$$\dot{g}_1 = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial G_1} = \frac{\partial \left(\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle + \langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle \right)}{\partial G_1}, \quad (5.5)$$

$$\dot{g}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial G_2} = \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle}{\partial G_2}. \quad (5.6)$$

Les expressions complètes sont obtenues à l'aide du logiciel de calcul symbolique Mupad. Le but de ce chapitre est d'analyser l'évolution de e_1 , e_2 , g_1 et g_2 . Nous allons, pour cela, intégrer numériquement les équations (5.3) à (5.6), à l'aide de l'intégrateur RK4¹. Nous programmons en Fortran 90. Le programme complet se trouve à l'Annexe G de notre travail. Dans tous les systèmes que nous allons étudier, les masses sont exprimées en masse solaire (m_\odot), les distances en unité astronomique² (UA) et le temps en année.

5.2 Importance des corrections relativistes et de marée

Avant d'analyser l'évolution de systèmes de différentes configurations, nous nous intéressons à l'ordre de grandeur des composantes hamiltoniennes moyennées. Nous allons considérer trois cas principaux. Chaque graphe représente les composantes $\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$, $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$, $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ en fonction du demi-grand axe a_1 pour un système donné. Nous fixons tous les paramètres et faisons uniquement varier a_1 entre 0.01 UA et 1 UA . Ces demi-grands axes correspondent à des périodes de révolution de 8 heures à 1 année autour d'une étoile de type solaire. De cette façon, nous pouvons voir l'effet de la relativité et des

1. L'intégrateur RK4 convient pour notre objectif car les périodes du mouvement sont de l'ordre de 30 jours pour la rotation de l'étoile centrale et de quelques jours à quelques années pour la révolution des corps m_1 et m_2 autour de m_0 . Dans le cas d'un système hiérarchique avec des grandes périodes de révolution, l'utilisation d'un intégrateur symplectique peut se révéler nécessaire.

2. 1 $UA = 149597871000 m$.

masses non ponctuelles sur l'Hamiltonien total. Le premier système que nous considérons est un système du type "Soleil-Terre-masse négligeable". Nous fixons la masse du troisième corps à $10^{-9} m_{\odot}$. Ainsi, nous pouvons considérer que nous analysons un système à deux corps puisque le troisième corps est trop peu massif que pour influencer m_0 et m_1 . Les paramètres choisis pour ce système sont repris à la table 5.1.

Il est à noter que les systèmes considérés dans cette section sont fictifs et sont seulement inspirés du système solaire en ce qui concerne les masses des corps et leur excentricité.

Variables	Soleil-Terre- $10^{-9} m_{\odot}$	Soleil-Jupiter- $10^{-9} m_{\odot}$	Soleil-Terre-Jupiter
m_0	$1 m_{\odot}$	$1 m_{\odot}$	$1 m_{\odot}$
m_1	$3.0032 \cdot 10^{-6} m_{\odot}$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_{\odot}$	$3.0032 \cdot 10^{-6} m_{\odot}$
m_2	$10^{-9} m_{\odot}$	$10^{-9} m_{\odot}$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_{\odot}$
a_2	5.20336301 UA	5.20336301 UA	5.20336301 UA
Ω	30 jours	30 jours	30 jours
R_0	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$
i	0°	0°	0°
e_1	0.01671022	0.04839	0.01671022
e_2	0.01	0.01	0.04839
g_1	0°	0°	0°
g_2	0°	0°	0°

TABLE 5.1 – Valeurs des paramètres pour les trois modèles étudiés

Nous établissons un critère objectif qui nous permet de savoir si une correction a de l'importance par rapport au terme octupole. Nous décidons qu'une correction est significativement importante si

$$\left| \frac{\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle}{\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle} \right| > 10^{-3} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle}{\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle} \right| > 10^{-3}.$$

Ainsi, il est facile de déterminer à partir de quel demi-grand axe il n'est plus utile de considérer l'une des corrections.

La figure 5.1 représente les composantes hamiltoniennes pour le système "Soleil-Terre-masse négligeable". La composante octupole est représentée en bleu. La composante relativiste est tracée en vert alors que la composante liée à la marée est représentée en rouge.

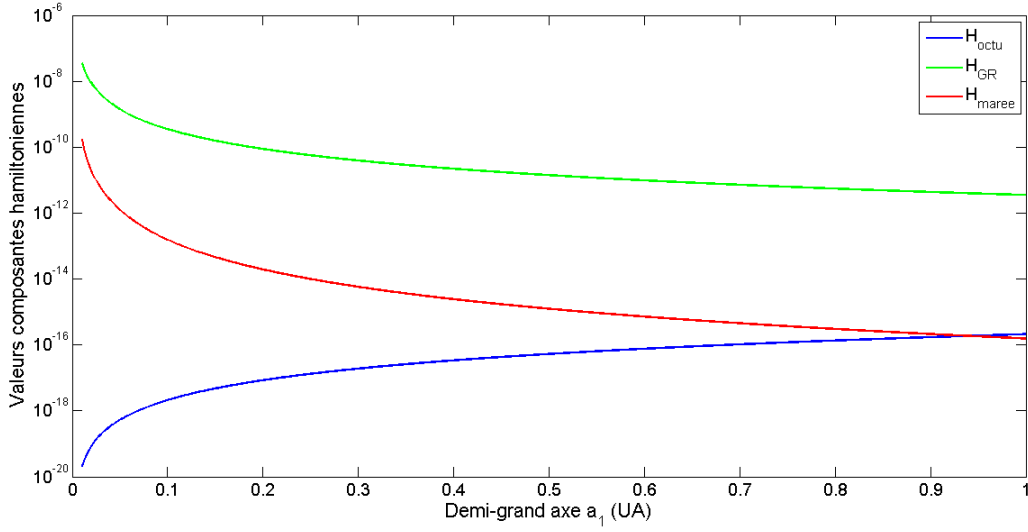


FIGURE 5.1 – Ordre de grandeur des composantes hamiltoniennes en fonction du demi-grand axe a_1 pour un système "Soleil-Terre-masse négligeable". Les simulations ont été réalisées tous les 0.001 UA . L'axe vertical est un axe logarithmique en base 10. Les composantes ont été tracées en valeur absolue

Nous constatons une différence d'ordre de grandeur entre la composante octupole, la composante de marée et la composante relativiste. La table 5.2 reprend les valeurs des différentes composantes hamiltoniennes pour $a_1 = 0.01 \text{ } UA$ (correspondant à une période $T_1 = 8.77$ heures), $0.05 \text{ } UA$ ($T_1 = 4$ jours), $0.1 \text{ } UA$ ($T_1 = 11,5$ jours), $0.3 \text{ } UA$ ($T_1 = 60$ jours) et $1 \text{ } UA$ ($T_1 = 1$ an). Cette table permet de comparer les ordres de grandeur de $\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$, $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ et $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ lorsque le demi-grand axe augmente.

	$a_1 = 0.01 \text{ } UA$	$a_1 = 0.05 \text{ } UA$	$a_1 = 0.1 \text{ } UA$	$a_1 = 0.3 \text{ } UA$	$a_1 = 1 \text{ } UA$
$\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$	$-2.10 \cdot 10^{-20}$	$-5.26 \cdot 10^{-19}$	$-2.1 \cdot 10^{-18}$	$-1.89 \cdot 10^{-17}$	$-2.10 \cdot 10^{-16}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$	$-3.51 \cdot 10^{-8}$	$-1.40 \cdot 10^{-9}$	$-3.50 \cdot 10^{-10}$	$-3.89 \cdot 10^{-11}$	$-3.51 \cdot 10^{-12}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$	$-1.70 \cdot 10^{-10}$	$-1.24 \cdot 10^{-12}$	$-1.55 \cdot 10^{-13}$	$-5.73 \cdot 10^{-15}$	$-1.55 \cdot 10^{-16}$

TABLE 5.2 – Valeurs des composantes hamiltoniennes moyennées pour plusieurs valeurs de a_1 pour le système "Soleil-Terre-masse négligeable"

Lorsque $a_1 = 0.01 \text{ } UA$ ($T_1 = 8.77$ heures), la composante octupole est minimale et est de l'ordre de 10^{-20} . La composante de marée et la composante relativiste sont maximales et sont respectivement de l'ordre de 10^{-10} et 10^{-8} . En $a_1 = 0.05 \text{ } UA$ ($T_1 = 4$ jours), les corrections relativistes et de marée sont moins importantes que lorsque a_1 est plus proche de l'étoile centrale. De même, pour tous les demi-grands axes supérieurs, l'ordre

des corrections continue de décroître et de dominer les interactions séculaires $\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$.

Quelle que soit la valeur de a_1 entre 0.01 UA et 1 UA , ce sont les corrections relativistes qui sont les plus importantes. Contrairement aux corrections, la valeur de l'octupole augmente pour des demi-grands axes plus grands et est maximale lorsque $a_1 = 1 UA$, c'est-à-dire lorsque les corps m_1 et m_2 sont les plus proches, comme attendu. Il est intéressant de remarquer que les effets de marée deviennent comparables aux interactions séculaires à 1 UA .

Les comportements des composantes hamiltoniennes peuvent être expliqués via leur expression analytique. Par l'expression de la composante octupole, nous avons

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle \propto a_1^2,$$

ce qui est bien vérifié car $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}}(a_1 = 0.01) \rangle = 10^2 \cdot \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}}(a_1 = 0.1) \rangle$.

En ce qui concerne $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$, nous savons que

$$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle \propto a_1^{-2},$$

ce qui est vérifié dans la table 5.2. Ainsi, lorsque a_1 est multiplié par 10, $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ sera divisé par 100, ce qui explique que $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ décroît de cette façon sur le graphe de la figure 5.1. Si nous analysons l'expression $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$, nous trouvons :

$$\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle \propto a_1^{-3} + a_1^{-6},$$

et donc lorsque a_1 est multiplié par 10, $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ sera divisé par 1000.

Lorsque nous analysons le système "Soleil-Terre-masse négligeable", nous obtenons grâce au critère établi que :

- Quel que soit le demi-grand axe a_1 entre 0.01 UA et 1 UA , les corrections de marée doivent être considérées dans le calcul de l'Hamiltonien total.
- Quelque soit le demi-grand axe a_1 entre 0.01 UA et 1 UA , les corrections relativistes doivent être considérées dans le calcul de l'Hamiltonien total.

Nous décidons de grossir la masse m_1 et nous considérons un système "Soleil-Jupiter-masse négligeable". Les données utilisées pour ce système sont indiquées à la table 5.1. Comme pour le premier système, les valeurs des composantes pour différents a_1 sont rassemblées à la table 5.3.

Premièrement, nous tentons d'établir les différences par rapport au premier système. Tout d'abord, nous savons que

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle \propto m_1,$$

et sa valeur sera donc multipliée par 10^3 lorsque m_1 passe de $10^{-6}m_{\odot}$ (Terre) à $10^{-3}m_{\odot}$

(Jupiter). Nous constatons bien cela, quand nous comparons, par exemple, la valeur de $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}}(a_1 = 0.05) \rangle$ pour les deux systèmes étudiés.

Au vu des expressions de $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ et $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$, nous savons que si m_1 grossit, alors les corrections seront plus importantes. En effet,

$$\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle \propto m_1^2 + m_1.$$

Nous observons bien que les corrections de marée sont plus importantes lorsque m_1 passe de $10^{-6} m_{\odot}$ à $10^{-3} m_{\odot}$. Aussi,

$$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle \propto m_1.$$

En $a_1 = 0.01 \text{ UA}$ ($T_1 = 8$ heures), nous passons de $-3.51 \cdot 10^{-8}$ si $m_1 = m_{\text{Terre}}$ à $-1.12 \cdot 10^{-5}$ lorsque $m_1 = m_{\text{Jupiter}}$. La composante relativiste est donc bien multipliée par 10^3 , rapport entre la masse de la Terre et celle de Jupiter. Sur la figure 5.2, nous observons en $a_1 = 0.01 \text{ UA}$ que les corrections de marée sont à peine dix fois moins importantes que les corrections relativistes. Sur la figure 5.1, les corrections de marée étaient cent fois inférieures à celles relativistes.

Deuxièmement, concernant les similitudes avec le premier système, on remarque que l'allure du graphe 5.2 est identique aux précédent.

Lorsque m_1 est proche de m_0 , $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ décroît plus vite que $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$: elle passe de $-1.65 \cdot 10^{-6}$ (en $a_1 = 0.01 \text{ UA}$) à $-5.10 \cdot 10^{-11}$ (en $a_1 = 0.1 \text{ UA}$). La composante relativiste, elle, est divisée par 10^2 (cf. table 5.3). Ceci s'explique par le fait que

$$\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle \propto a_1^{-3} + a_1^{-6} \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle \propto a_1^{-2}.$$

Plus a_1 augmente, plus la décroissance de $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ est faible. En $a_1 = 1 \text{ UA}$ ($T_1 = 1 \text{ an}$), la contribution relativiste est de l'ordre de 10^{-9} alors que la contribution de marée est de l'ordre de 10^{-14} , tout comme la composante octupole.

	$a_1 = 0.01 \text{ UA}$	$a_1 = 0.05 \text{ UA}$	$a_1 = 0.1 \text{ UA}$	$a_1 = 0.3 \text{ UA}$	$a_1 = 1 \text{ UA}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$	$-6.71 \cdot 10^{-18}$	$-1.67 \cdot 10^{-16}$	$-6.71 \cdot 10^{-16}$	$-6.04 \cdot 10^{-15}$	$-6.71 \cdot 10^{-14}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$	$-1.12 \cdot 10^{-5}$	$-4.47 \cdot 10^{-7}$	$-1.12 \cdot 10^{-7}$	$-1.24 \cdot 10^{-8}$	$-1.12 \cdot 10^{-9}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle$	$-1.65 \cdot 10^{-6}$	$-4.97 \cdot 10^{-10}$	$-5.10 \cdot 10^{-11}$	$-1.83 \cdot 10^{-12}$	$-4.94 \cdot 10^{-14}$

TABLE 5.3 – Valeurs des composantes hamiltoniennes moyennées pour plusieurs valeurs de a_1 pour le système "Soleil-Jupiter-masse négligeable"

Aussi, d'après le critère établi, nous concluons que

- Quel que soit le demi-grand axe a_1 entre 0.01 UA et 1 UA , les corrections de marée doivent être considérées dans le calcul de l'Hamiltonien total.
- Quel que soit le demi-grand axe a_1 entre 0.01 UA et 1 UA , les corrections relativistes doivent être considérées dans le calcul de l'Hamiltonien total.

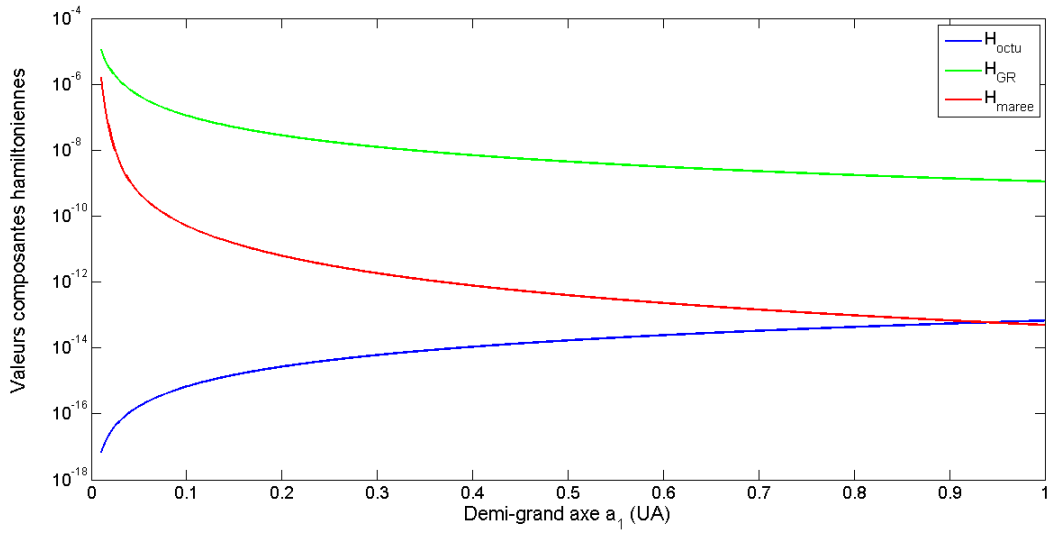


FIGURE 5.2 – Ordre de grandeur des composantes hamiltoniennes moyennées en fonction du demi-grand axe a_1 pour un système "Soleil-Jupiter-masse négligeable". Les simulations ont été réalisées tous les 0.001 UA . L'axe vertical est un axe logarithmique en base 10. Les composantes ont été tracées en valeur absolue

Nous traçons maintenant un graphe semblable aux deux précédents, où le modèle représenté est un modèle du type "Soleil-Terre-Jupiter", de façon à déterminer si l'importance des composantes relativiste ou de marée est modifiée par la troisième masse. En effet, les interactions séculaires entre deux corps massifs seront plus importantes mais domineront-elles la dynamique ? Les paramètres utilisés pour la figure 5.3 sont repris à la table 5.1.

Seule la masse m_1 apparaît dans les expressions $\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle$ et $\langle \mathcal{H}_{marée} \rangle$, les courbes de ces deux corrections ne seront donc pas affectées par la valeur de m_2 . Cependant, la composante octupole est proportionnelle au produit $m_1 m_2$, et sa valeur va donc être modifiée. Ainsi, comme le troisième corps était de masse $10^{-9} m_\odot$ dans le premier système et que celle-ci vaut maintenant $10^{-3} m_\odot$, la valeur de la composante octupole va être multipliée par 10^6 par rapport au premier modèle. Ceci s'observe aisément en comparant les figures 5.1 et 5.3 : la valeur de la composante octupole passe de $-2.1 \cdot 10^{-20}$ à $-2.02 \cdot 10^{-14}$ lorsque $a_1 = 0.01 UA$. La table 5.4 représente les valeurs des trois composantes hamiltoniennes pour certaines valeurs de $0.01 \leq a_1 \leq 1$.

Malgré le fait que les corrections ne sont pas affectées par m_2 , leurs importances respectives sont modifiées. En effet, comme la composante octupole n'est plus du même ordre, les critères

$$\left| \frac{\langle \mathcal{H}_{GR} \rangle}{\langle \tilde{\mathcal{H}}_{octu} \rangle} \right| > 10^{-3} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\langle \mathcal{H}_{marée} \rangle}{\langle \tilde{\mathcal{H}}_{octu} \rangle} \right| > 10^{-3}$$

ne donnent plus les mêmes résultats. L'ordre des corrections relativistes devient inférieur à l'ordre du terme octupole lorsque a_1 dépasse 0.364 UA , mais il est encore assez proche

de ce dernier pour devoir être considéré même en $a_1 = 1 \text{ UA}$. L'application du critère nous indique que :

- Les corrections relativistes doivent être considérées quelle que soit la valeur de a_1 entre 0.01 UA et 1 UA ,
- Les corrections de marée n'ont de l'importance qu'entre 0.01 UA et 0.239 UA .

Nous constatons donc que pour une masse m_1 située à 1 UA , comme notre Terre, les corrections dues à la marée du Soleil ne doivent pas être prises en compte lorsqu'un Jupiter est présent. Les corrections relativistes, par contre, devraient l'être, si nous suivons le critère établi plus haut.

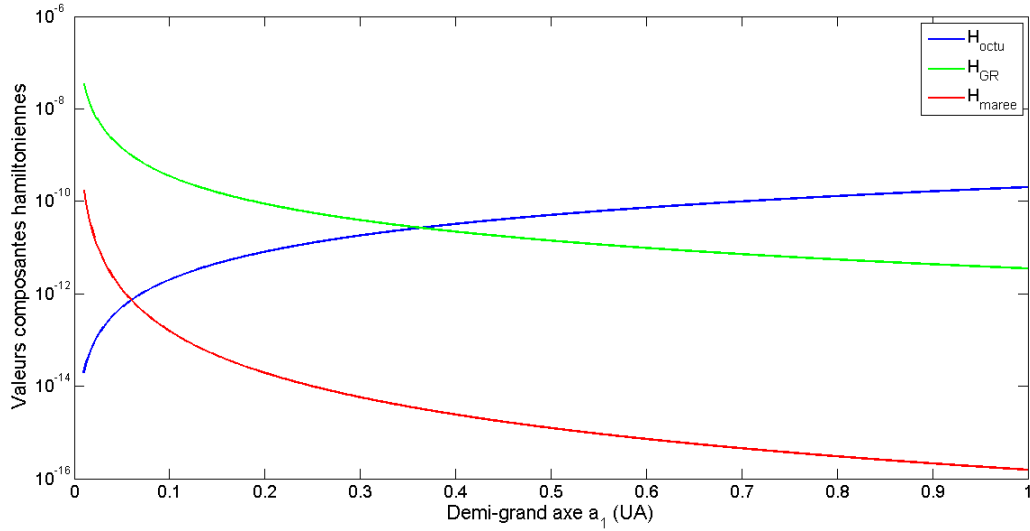


FIGURE 5.3 – Ordre de grandeur des composantes hamiltoniennes moyennées en fonction du demi-grand axe a_1 pour un système "Soleil-Terre-Jupiter". Les simulations ont été réalisées tous les 0.001 UA . L'axe vertical est un axe logarithmique en base 10. Les composantes ont été tracées en valeur absolue

	$a_1 = 0.01 \text{ UA}$	$a_1 = 0.05 \text{ UA}$	$a_1 = 0.1 \text{ UA}$	$a_1 = 0.3 \text{ UA}$	$a_1 = 1 \text{ UA}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$	$-2.02 \cdot 10^{-14}$	$-5.04 \cdot 10^{-13}$	$-2.02 \cdot 10^{-12}$	$-1.81 \cdot 10^{-11}$	$-2.02 \cdot 10^{-10}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$	$-3.51 \cdot 10^{-8}$	$-1.4 \cdot 10^{-9}$	$-3.51 \cdot 10^{-10}$	$-3.90 \cdot 10^{-11}$	$-3.51 \cdot 10^{-12}$
$\langle \mathcal{H}_{\text{TB}} \rangle$	$-1.70 \cdot 10^{-10}$	$-1.24 \cdot 10^{-12}$	$-1.55 \cdot 10^{-13}$	$-5.74 \cdot 10^{-15}$	$-1.55 \cdot 10^{-16}$

TABLE 5.4 – Valeurs des composantes hamiltoniennes moyennées pour plusieurs valeurs de a_1 pour le système "Soleil-Terre-Jupiter"

En conclusion, la troisième masse joue un rôle significatif en ce qui concerne l'importance des effets relativistes et de marée, malgré le fait qu'elle n'affecte pas directement $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ et $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$. Son importance dépend avant tout de la proximité des trois corps et de leur masse.

5.2.1 Carte des composantes hamiltoniennes

Cette sous-section permet d'avoir une vue synthétique des valeurs des trois composantes hamiltoniennes dans le cas d'une troisième masse jumelle de la Terre ou de Jupiter. Premièrement, nous analysons un système où la troisième masse vaut $10^{-3} m_{\odot}$ et est située à 5 UA (jumelle de Jupiter). En gardant cette masse et ce demi-grand axe constant, nous faisons varier la masse m_1 ainsi que le demi-grand-axe a_1 . Le résultat est présenté à la figure 5.4. Ce sont les ordres des différentes composantes qui nous intéressent, c'est pourquoi nous traçons le logarithme des composantes. Nous faisons varier a_1 entre 0.01 UA et 1 UA . De cette façon, pour chaque valeur de a_1 , nous sommes face à un système hiérarchique et la théorie octupole peut s'appliquer. La masse m_1 varie entre $10^{-6} m_{\odot}$ et $1 m_{\odot}$ de sorte à considérer aussi bien un système à deux planètes qu'un système binaire avec compagnon planétaire. À gauche de cette figure, se trouvent les valeurs de la composante hamiltonienne octupole. Au centre, ce sont les valeurs de la composante relativiste. Enfin, à droite, il s'agit des valeurs de la composante de marée.

Analysons tout d'abord les valeurs de la composante octupole. Nous pouvons voir qu'à masse m_1 constante, plus le demi-grand axe a_1 augmente, plus l'ordre de $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle$ croît. Nous avons déjà pu observer cela aux figures précédentes. Si nous laissons constant le demi-grand axe, et que nous augmentons la masse m_1 , alors l'ordre de cette composante augmente aussi. Concentrons nous maintenant sur la composante relativiste (figure 5.4 centre). Nous constatons que l'allure des courbes est inversée par rapport à la figure de gauche. Aussi, lorsque a_1 augmente, l'ordre de $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ diminue. Lorsque m_1 augmente, la composante relativiste devient elle aussi plus importante. La troisième figure (figure 5.4 droite) en lien avec les effets de marée est très semblable à celle des effets relativistes. Son ordre est généralement inférieur à celui de la composante relativiste, sauf pour des valeurs de a_1 très petites. Ainsi, les interactions newtoniennes dominent généralement la dynamique (sauf cas d'extrême proximité à l'étoile), qui est corrigée par les effets relativistes et dans une moindre mesure par les effets de marée.

La figure 5.5 représente les valeurs des trois composantes hamiltoniennes dans le cas d'un système où $m_2 = 10^{-6} m_{\odot}$ et $a_2 = 1 \text{ UA}$ (jumeau de la Terre). Pour que le système soit hiérarchique, nous faisons varier a_1 entre 0.01 UA et 0.2 UA . La masse m_1 varie de $10^{-6} m_{\odot}$ à $1 m_{\odot}$ comme précédemment. L'allure des trois figures obtenues est similaire à la figure 5.4. L'ordre de la composante relativiste est toujours supérieur à l'ordre de la composante octupole. La composante relativiste domine également la composante de marée, sauf dans le cas où m_1 est proche de $1 m_{\odot}$ et a_1 très petit (inférieur à 0.05 UA). Notons que les valeurs de $\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle$ et $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ sont cette fois très proches. La dynamique du système est donc, dans ce cas-ci, complètement différente d'une dynamique purement newtonienne. Les effets relativistes sont prépondérants et les effets de marée tout aussi importants.

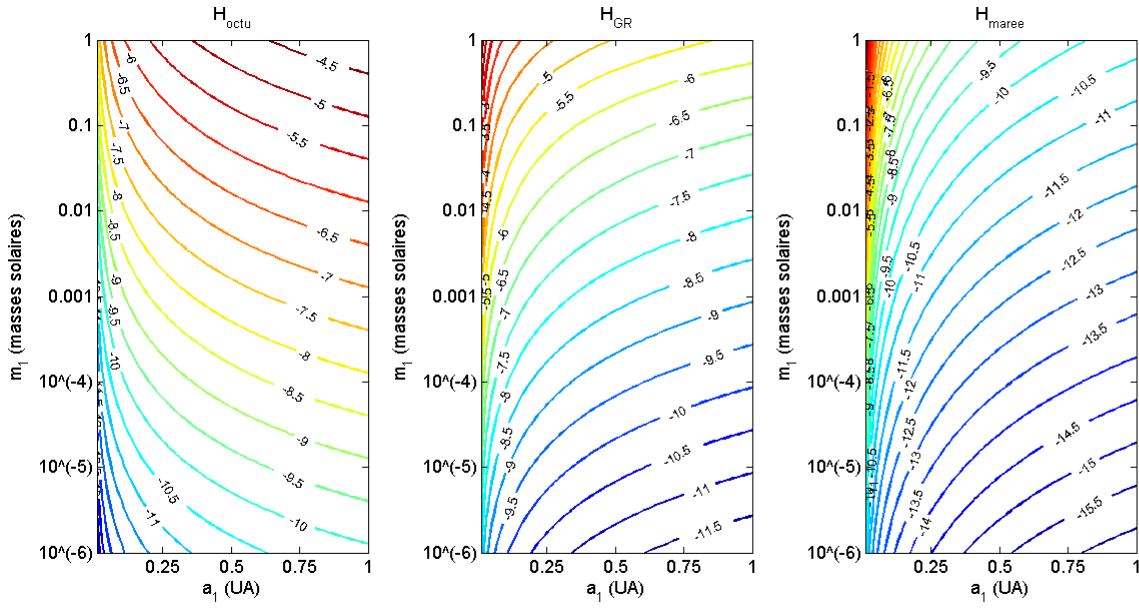


FIGURE 5.4 – Logarithme des valeurs des composantes hamiltoniennes dans le cas d'un système où $m_2 = 10^{-3} m_\odot$, $a_2 = 5 \text{ UA}$ et $e_1 = 0.01$. La masse m_1 varie entre $10^{-6} m_\odot$ et $1 m_\odot$. Le demi-grand axe a_1 varie entre 0.01 UA et 1 UA . Gauche : composante octupole. Centre : composante relativiste. Droite : composante de marée

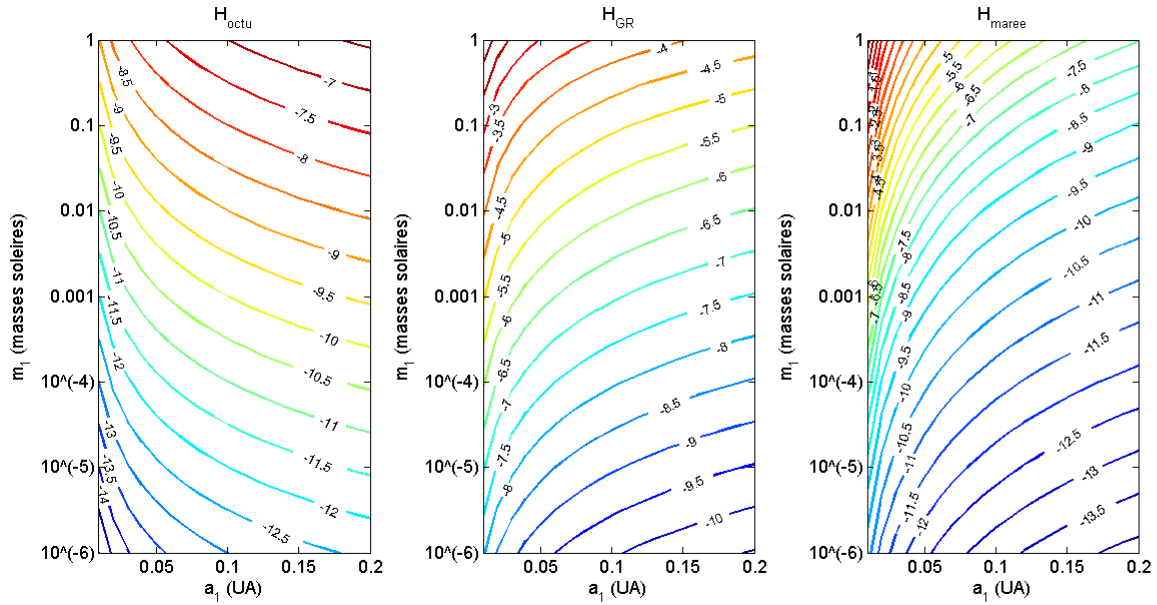


FIGURE 5.5 – Logarithme des valeurs des composantes hamiltoniennes dans le cas d'un système où $m_2 = 10^{-6} m_\odot$, $a_2 = 1 \text{ UA}$ et $e_1 = 0.01$. La masse m_1 varie entre $10^{-6} m_\odot$ et $1 m_\odot$. Le demi-grand axe a_1 varie entre 0.01 UA et 0.2 UA . Gauche : composante octupole. Centre : composante relativiste. Droite : composante de marée

5.3 Évolution de systèmes

Après avoir discuté de l'importance des effets relativistes et de marée, nous analysons plus particulièrement l'évolution orbitale de quelques systèmes.

Pour appuyer l'analyse faite dans la section 5.2, nous traçons l'évolution de e_1 , e_2 , g_1 et g_2 pour quatre systèmes pour lesquels nous fixons a_1 . Les quatre systèmes sont

1. Système 1 : Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1 \text{ UA}$,
2. Système 2 : Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$,
3. Système 3 : Soleil-Jupiter chaud-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$,
4. Système 4 : Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter où $a_1 = 0.05 \text{ UA}$.

Les paramètres utilisés sont repris à la table 5.5.

Variables	Système 1	Système 2	Système 3	Système 4
m_0	$1 m_\odot$	$1 m_\odot$	$1 m_\odot$	$1 m_\odot$
m_1	$3.0032 \cdot 10^{-6} m_\odot$	$3.0032 \cdot 10^{-6} m_\odot$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$
m_2	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$	$0.9545 \cdot 10^{-3} m_\odot$
a_1	1 UA	0.15 UA	0.15 UA	0.05 UA
a_2	5.2 UA	5.2 UA	5.2 UA	5.2 UA
Ω	30 jours	30 jours	30 jours	30 jours
R_0	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$	$4.65476 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$
i	0°	0°	0°	0°
e_1	0.01671022	0.01671022	0.01671022	0.01671022
e_2	0.01	0.01	0.01	0.01
g_1	0°	0°	0°	0°
g_2	0°	0°	0°	0°

TABLE 5.5 – Valeurs des paramètres pour les quatre systèmes étudiés

5.3.1 Système 1 : Soleil-Terre-Jupiter

Le premier système que nous étudions est le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1 \text{ UA}$. La figure 5.6 représente l'évolution de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 sans correction. Nous analysons l'évolution de ces variables pendant 10^6 années. Nous traçons également la figure 5.7 qui représente l'évolution de $g_1 - g_2$.

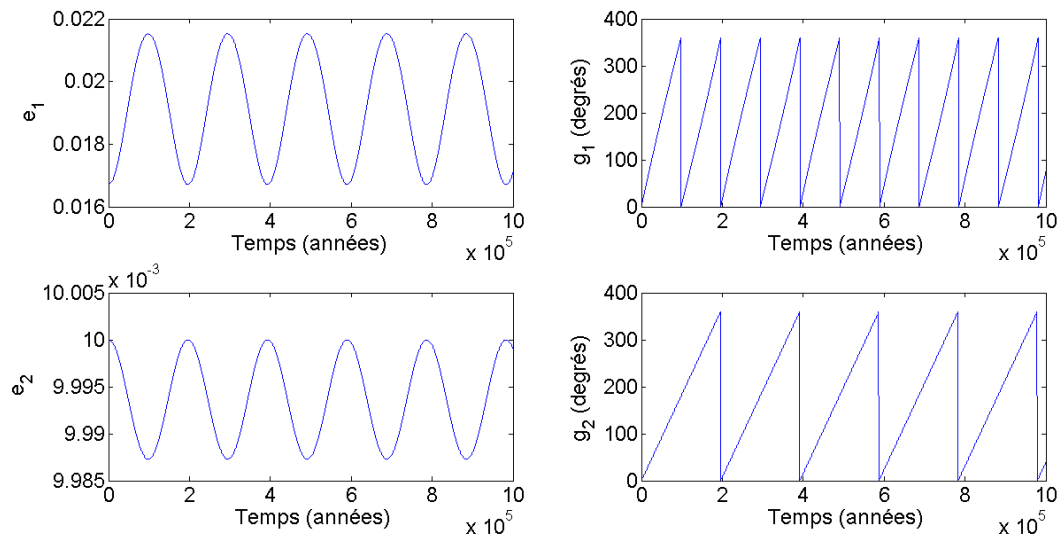


FIGURE 5.6 – Évolutions de e_1 , e_2 , g_1 , g_2 pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations sans correction

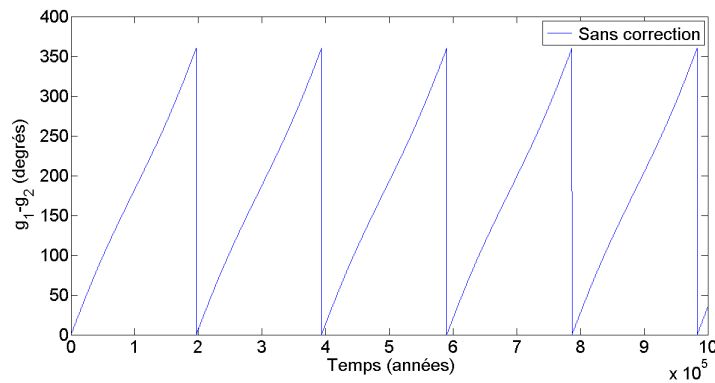


FIGURE 5.7 – Évolution de $g_1 - g_2$ pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations sans correction

Nous constatons que les courbes e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$ ont toutes la même période. Celle-ci vaut environ $1.97 \cdot 10^5$ années. Les courbes d'évolution de e_1 et e_2 sont telles que leur maxima sont inversés. Les courbes g_1 et g_2 varient entre 0 et 360 degrés. Remarquons que la période de g_1 est $9.81 \cdot 10^4$ années, ce qui correspond à la moitié de la période de e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$.

Nous allons à présent tenir compte de l'effet de marée dans les équations hamiltoniennes. Nous obtenons la figure 5.8. Les courbes sans correction (en bleu) sont à nouveau représentées sur les différents graphiques. Les courbes avec corrections de marée sont représentées en vert. Nous ne voyons pas de différence entre les courbes avec ou sans corrections. Lorsque nous analysions les composantes hamiltoniennes (figure 5.3), nous avons constaté qu'il ne fallait pas tenir compte de la composante hamiltonienne de marée dans les calculs si $a_1 > 0.239$ UA, et donc *a fortiori* en $a_1 = 1$ UA. Il semble donc logique que les correc-

tions de marée ne soient pas visibles à la figure 5.8. La figure 5.9 représente l'évolution de $g_1 - g_2$ pour le système sans correction et avec corrections de marée. Comme à la figure précédente, aucune variation entre les évolutions sans/avec corrections de marée n'y est constatée.

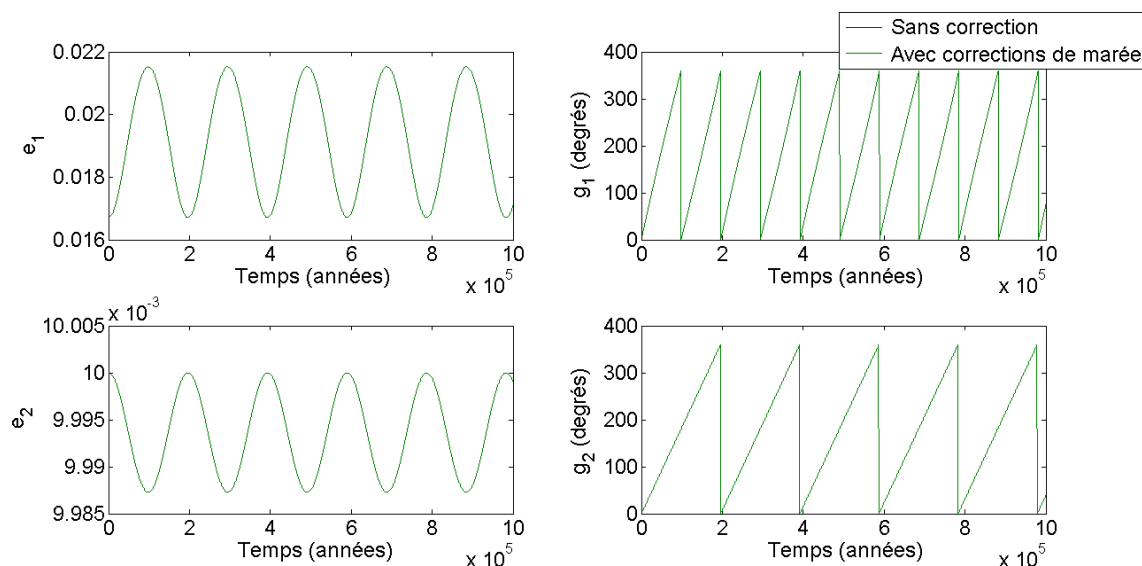


FIGURE 5.8 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 , g_2 pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections de marée

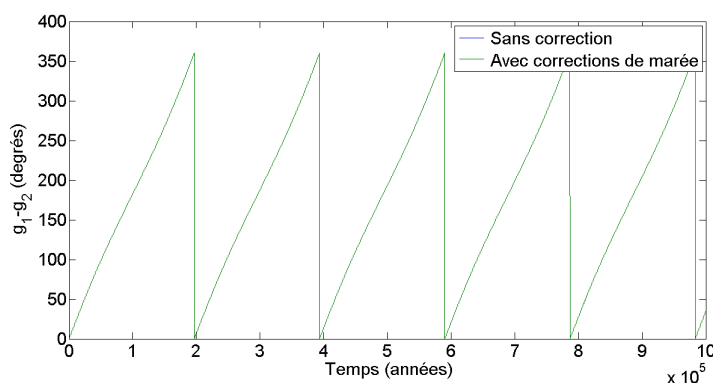


FIGURE 5.9 – Évolution de $g_1 - g_2$ pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections de marée

La figure 5.10 représente les évolutions de e_1 , g_1 , e_2 , g_2 sans correction et avec corrections relativistes et la figure 5.11 l'évolution de $g_1 - g_2$. Sur ces figures, nous ne tenons pas compte des effets de marée.

Nous constatons que les corrections sont cette fois significatives puisque nous observons un léger déphasage entre les courbes corrigées et non corrigées. Les courbes corrigées sont représentées en vert alors que les courbes non corrigées sont tracées en bleu. Un déphasage entre les courbes est visible dès les premières années et est de plus en plus visible plus le temps augmente. La période de la courbe avec corrections est plus petite que la période de la courbe sans correction. La période de e_1 corrigée vaut $1.955 \cdot 10^5$ années.

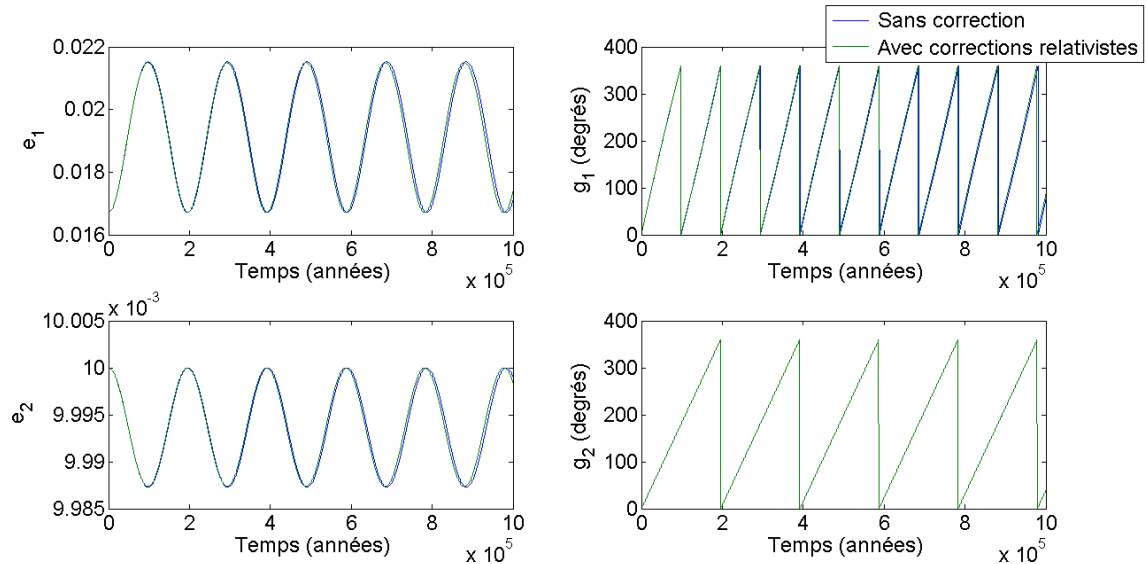


FIGURE 5.10 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 , g_2 pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections relativistes

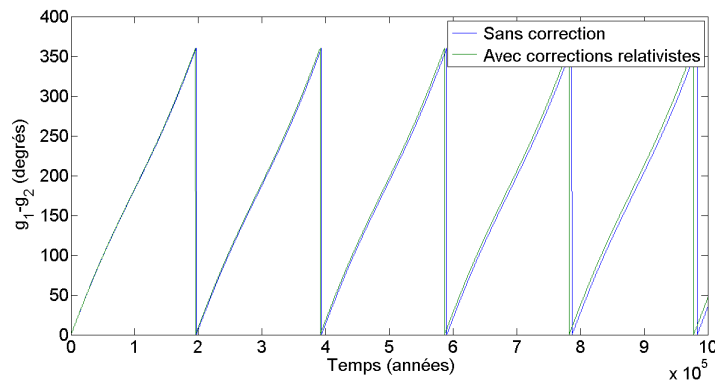


FIGURE 5.11 – Évolution de $g_1 - g_2$ pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections relativistes

Nous traçons finalement les figures 5.12 et 5.13, reprenant simultanément les deux corrections. Sans surprise, celles-ci sont extrêmement proches des figures ne se préoccupant que des corrections relativistes.

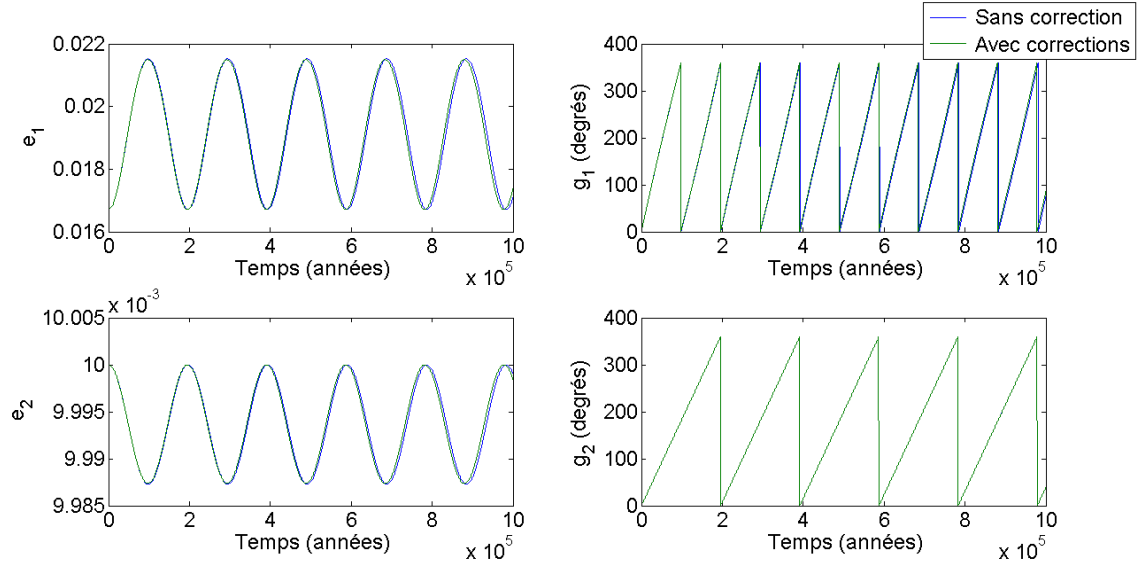


FIGURE 5.12 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 , g_2 pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections

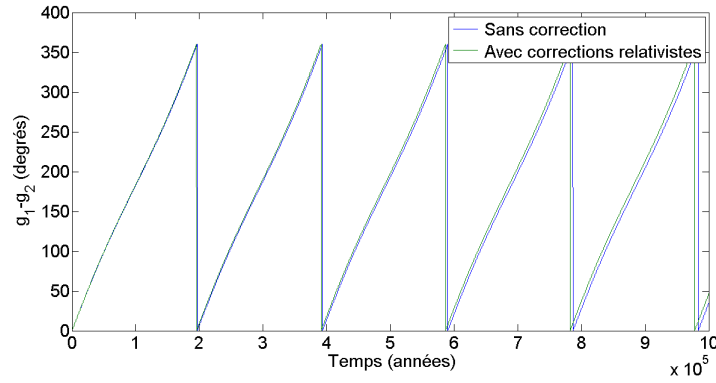


FIGURE 5.13 – Évolution de $g_1 - g_2$ pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 1$ UA, équations avec corrections

En conclusion, comme attendu après l'analyse du graphe de l'Hamiltonien, les corrections de marée n'influencent pas le comportement des éléments orbitaux pour le système "Soleil-Terre-Jupiter". Les corrections relativistes, quant à elles, doivent être prises en compte, même si à cette distance de l'étoile centrale, leur impact est limité et ne modifie pas grandement les évolutions de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 .

5.3.2 Système 2 : Soleil-Terre chaude-Jupiter

Le système "Soleil-Terre-Jupiter" précédent avec $a_1 = 1 \text{ UA}$ a permis de voir que si le demi-grand axe est grand, les effets de marée ne doivent pas être pris en compte et les effets relativistes sont peu visibles. Nous avons conclu, d'après la section 5.2, que les effets de marée étaient à prendre en considération pour des demi-grands axes en deçà de 0.239 UA . Nous traçons donc maintenant l'évolution de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 pour le système "Soleil-Terre-Jupiter", mais cette fois avec $a_1 = 0.15 \text{ UA}$, de façon à respecter $a_1 < 0.239 \text{ UA}$. Nous intégrons les équations hamiltoniennes jusqu'à 10^7 années. Les paramètres initiaux utilisés pour ce deuxième système sont repris à la table 5.5. Nous nommons ce deuxième système "Soleil-Terre chaude-Jupiter".

Les évolutions de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 avec corrections de marée sont représentées à la figure 5.14 et celle de $g_1 - g_2$ à la figure 5.15.

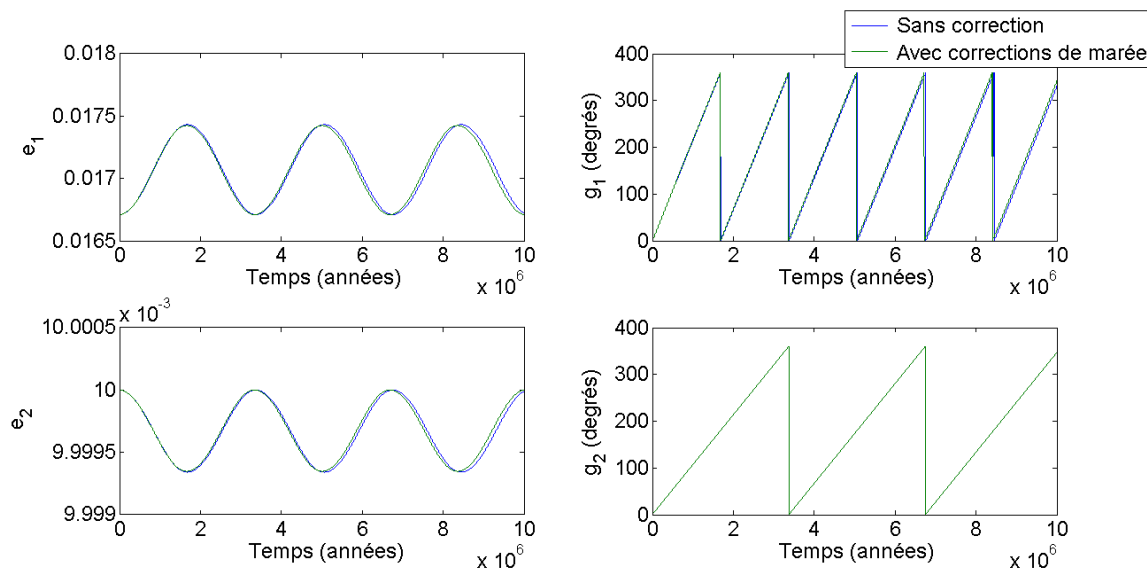


FIGURE 5.14 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 avec corrections de marée, pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections de marée sont tracées en vert

Nous constatons un déphasage entre la courbe sans et avec corrections de marée. La période des courbes avec corrections est plus petite que la période des courbes sans correction. Cependant, le déphasage est assez faible. La période avant correction vaut $3.38 \cdot 10^6$ années alors que la période avec corrections de marée est égale à $3.34 \cdot 10^6$ années. Les amplitudes des courbes e_1 et e_2 sont plus faibles lorsque nous tenons compte des corrections. Cette différence entre les amplitudes est cependant très faible, de l'ordre de 10^{-5} dans le cas de la courbe e_1 . En effet, l'amplitude de e_1 avant correction vaut $7.2 \cdot 10^{-4}$ alors que l'amplitude avec corrections de marée est égale à $7.1 \cdot 10^{-4}$. En ce qui concerne la courbe e_2 , l'amplitude de la courbe avec corrections de marée est légèrement plus petite que celle de la courbe sans corrections puisque le corps est plus massif.

Toutefois, la différence entre les amplitudes avec et sans corrections est de l'ordre de 10^{-6} .

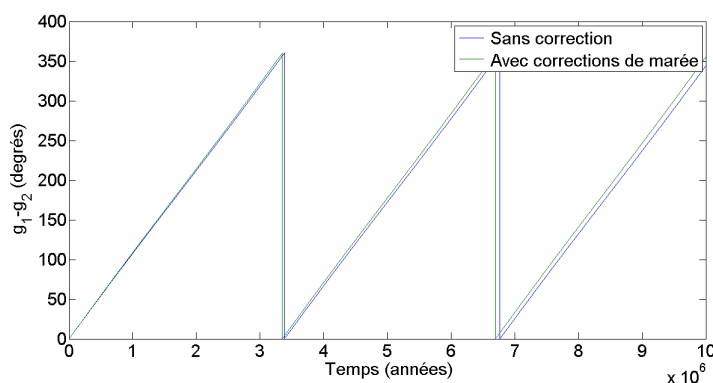


FIGURE 5.15 – Évolution de $g_1 - g_2$ avec corrections de marée pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections de marée sont tracées en vert

Après avoir tenu compte des corrections de marée, nous traçons maintenant les évolutions avec corrections relativistes. Nous obtenons les figures 5.16 et 5.17. Sur ces figures, nous observons qu'à la fois l'amplitude et la période sont fortement modifiées par les corrections relativistes. Sur le graphe des composantes hamiltoniennes, nous avons constaté que la composante relativiste était plus importante que la composante de marée, lorsque $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Il semble donc logique que la différence entre les courbes non corrigées et les courbes corrigées soient aussi importantes. L'amplitude des excentricités diminue fortement lorsque nous tenons compte des corrections relativistes. Elle vaut approximativement $6 \cdot 10^{-5}$, alors qu'elle valait précédemment $7.2 \cdot 10^{-4}$. La période de e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$ corrigée vaut $2.71 \cdot 10^5$ années tandis que la période non corrigée valait approximativement $3.38 \cdot 10^6$ années, la période est donc divisée par dix lorsque nous considérons les effets relativistes.

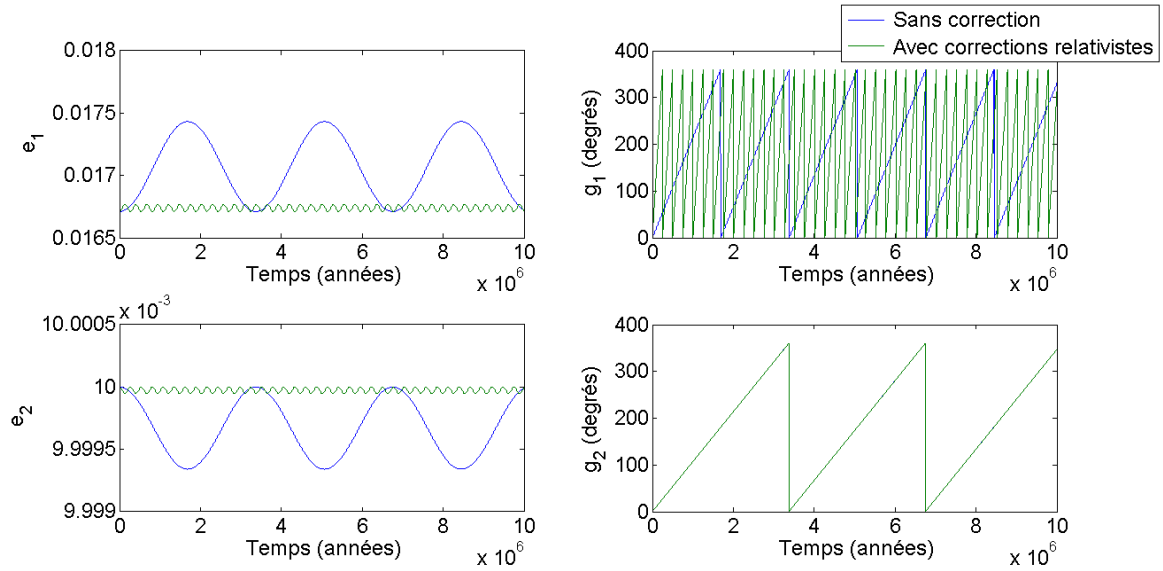


FIGURE 5.16 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 avec corrections relativistes, pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections relativistes sont tracées en vert

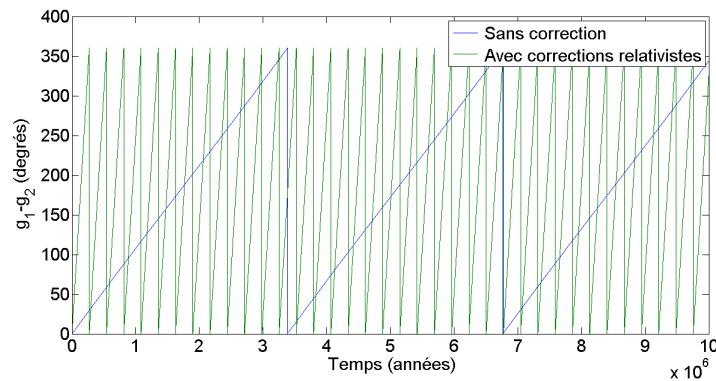


FIGURE 5.17 – Évolution de $g_1 - g_2$ avec corrections relativistes pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections relativistes sont tracées en vert

Après avoir analysé les corrections séparément, nous traçons les évolutions non-corrigées et corrigées, en tenant compte des deux effets. Nous obtenons les figures 5.18 et 5.19. Comme attendu, ces figures sont presque les mêmes que les figures 5.16 et 5.17. Désormais, la période de e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$ vaut $2.7 \cdot 10^5$ années.

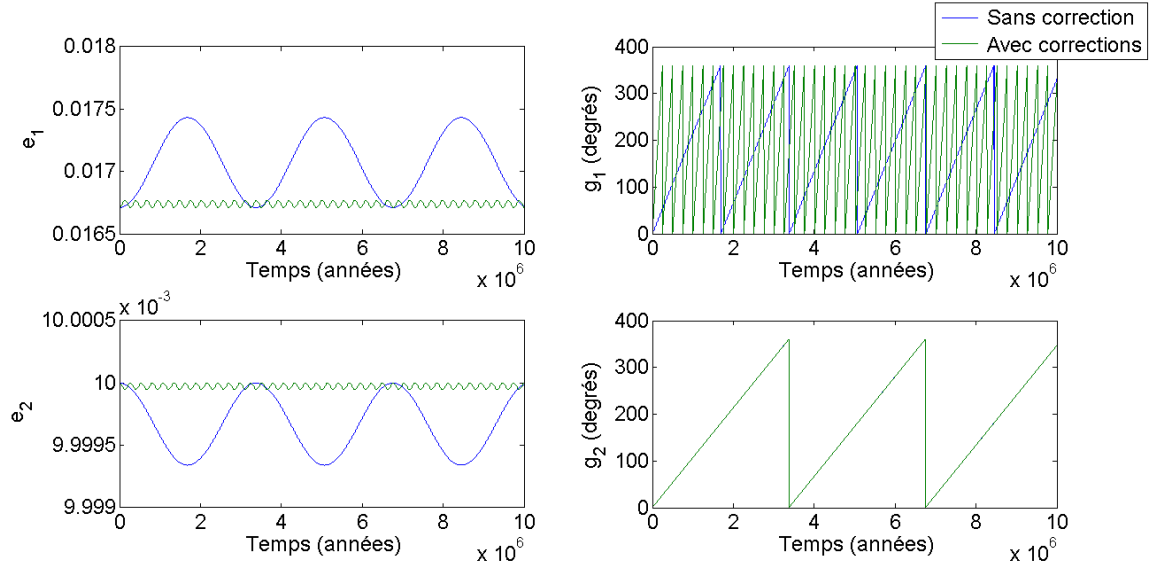


FIGURE 5.18 – Évolutions de e_1 , g_1 , e_2 et g_2 avec corrections relativistes et de marée, pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections sont tracées en vert

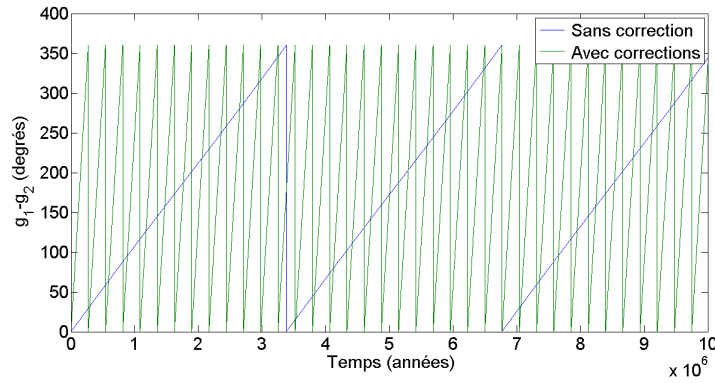


FIGURE 5.19 – Évolution de $g_1 - g_2$ avec corrections relativistes et de marée pour le système Soleil-Terre-Jupiter où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$. Les courbes sans correction sont représentées en bleu alors que les courbes avec corrections sont tracées en vert

5.3.3 Système 3 : Soleil-Jupiter chaud-Jupiter

Alors que les deux systèmes que nous venons d'analyser étaient tels que $m_1 = m_{\text{Terre}}$, nous analysons maintenant un système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter", où $a_1 = 0.15 \text{ UA}$ comme dans l'exemple précédent.

L'allure des graphiques est fort similaire à celle des graphiques que nous avons obtenus pour le système "Soleil-Terre chaude-Jupiter", c'est pourquoi nous ne reproduisons ici que l'évolution de e_1 , à la figure 5.20. Nous avons intégré les équations pendant $2 \cdot 10^7$ années.

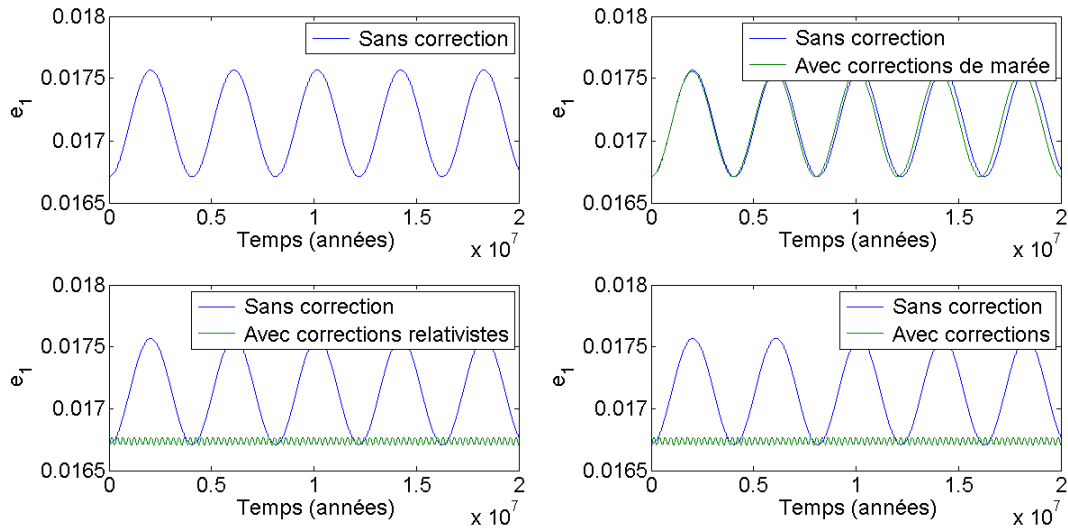


FIGURE 5.20 – Évolution de e_1 sans correction (en haut à gauche), avec corrections de marée (en haut à droite), avec corrections relativistes (en bas à gauche) et avec les deux corrections (en bas à droite) pour le système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter", où $a_1 = 0.15$ UA

L'évolution de e_1 sans correction est représentée en haut à gauche de la figure 5.20. La période de e_1 vaut $4.068 \cdot 10^6$ années. Cette période est supérieure à la période de e_1 sans correction pour le système "Soleil-Terre chaude-Jupiter" (qui valait $3.38 \cdot 10^6$ années). L'amplitude vaut quant à elle $8.6 \cdot 10^{-4}$.

Nous constatons que les corrections de marée (figure 5.20 en haut à droite) implique un déphasage entre la courbe sans correction et la courbe avec corrections de marée. La période de e_1 avec corrections de marée vaut $4.018 \cdot 10^6$ années, ce qui est inférieur à la période sans correction. Notons que cette différence entre les deux périodes était plus petite pour le système "Soleil-Terre chaude-Jupiter". Nous constatons aussi une diminution de l'amplitude : elle est maintenant égale à $8.5 \cdot 10^{-4}$ au lieu de $8.6 \cdot 10^{-4}$.

Les corrections relativistes (figure 5.20 en bas à gauche) impliquent à nouveau un changement d'amplitude et de période de la courbe e_1 . La période de e_1 , lorsque nous tenons compte des corrections relativistes, est égale à $2.74 \cdot 10^5$ années, c'est donc plus de dix fois inférieur à la période de e_1 sans correction.

A nouveau, ce sont ces changements qui dominent l'évolution de e_1 avec les deux corrections (figure 5.20 en bas à droite).

5.3.4 Système 4 : Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter

Le dernier système que nous analysons est le système "Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter". Ici, le deuxième corps se situe à 0.05 UA du Soleil, ce qui implique que les effets de marée vont être plus importants que dans les autres systèmes. Une planète si près de son étoile est appelée *Jupiter très chaud*. D'après les cartes des composantes hamiltoniennes (figure 5.4), l'ordre de grandeur de la composante hamiltonienne correspondant

aux corrections relativistes sera le plus grand. Viendra ensuite l'ordre de la composante hamiltonienne des effets de marée. La composante hamiltonienne octupole aura un ordre de grandeur plus faible que les deux corrections. En raison de la grande période des courbes sans correction, nous devons intégrer jusqu'à $3 \cdot 10^7$ années. Nous reproduisons les évolutions de l'excentricité e_1 lorsqu'aucune correction n'est prise en compte, lorsqu'une seule correction (relativiste ou de marée) est considérée et enfin lorsque les deux corrections sont présentes à la figure 5.21.

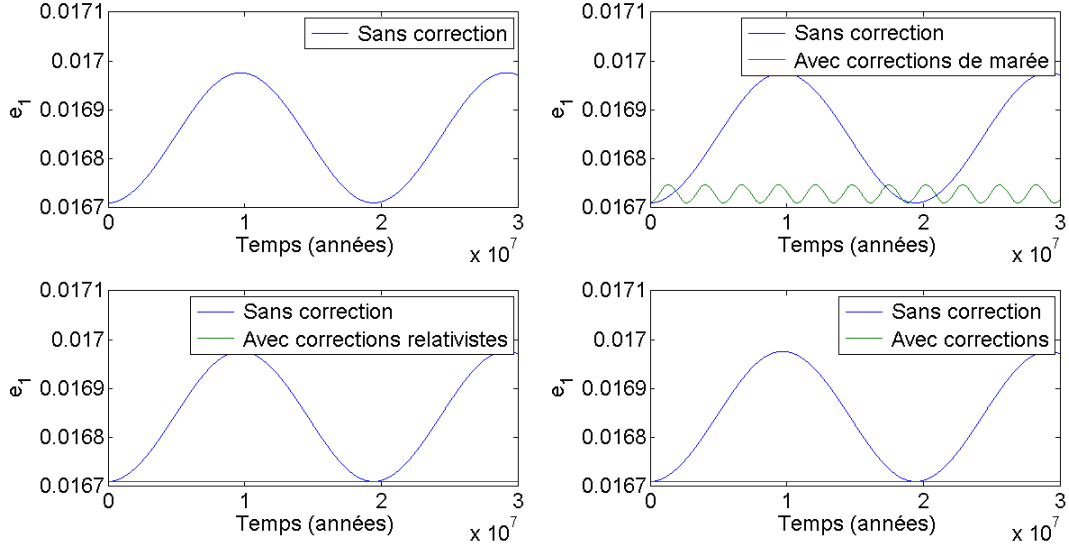


FIGURE 5.21 – Évolution de e_1 sans correction (en haut à gauche), avec corrections de marée (en haut à droite), avec corrections relativistes (en bas à gauche) et avec les deux corrections (en bas à droite) pour le système "Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter", où $a_1 = 0.05 \text{ UA}$

La période de la courbe e_1 sans correction (figure 5.21 en haut à gauche) est plus grande que la période de la même courbe pour le système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter". Elle vaut $1.947 \cdot 10^7$ années. L'amplitude, elle, a diminué, passant de $8.4 \cdot 10^{-4}$ à $2.7 \cdot 10^{-4}$. L'évolution de e_1 lorsque les corrections de marées sont considérées est reproduite en haut à droite de la figure 5.21. A la fois la période et l'amplitude de la courbe sont inférieures à celles de la courbe non corrigée. En effet, l'amplitude est maintenant égale à $4 \cdot 10^{-5}$. Elle est donc dix fois inférieure à l'amplitude de la courbe sans correction. La période de cette courbe corrigée vaut $2.697 \cdot 10^6$ années, ce qui est aussi dix fois inférieure à la valeur lorsque la courbe n'est pas corrigée. Nous pouvons aussi comparer les résultats avec ceux obtenus pour le système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter" avec effets de marée. Nous constatons ainsi ce qu'implique la diminution du demi-grand axe a_1 : alors que la période est divisée par deux par rapport à ce précédent système, l'amplitude est divisée par dix, passant de $8.6 \cdot 10^{-4}$ pour l'ancien système à $4 \cdot 10^{-5}$ pour ce nouveau système. Diminuer a_1 a donc fortement modifié l'allure de la courbe e_1 .

Analysons maintenant la courbe corrigée par la relativité (figure 5.21 en bas à gauche). La différence entre la courbe corrigée et la courbe non corrigée est très importante. La période et l'amplitude sont très fortement diminuées. La période est égale à $1.876 \cdot 10^4$

années, ce qui est cent fois inférieur à la courbe avec effets de marée et mille fois inférieur à la courbe sans correction. L'amplitude est aussi touchée, puisqu'elle vaut $4.78 \cdot 10^{-7}$ alors qu'elle est de l'ordre de 10^{-4} quand la courbe n'est pas corrigée et 10^{-5} lorsqu'on ne considère que les corrections de marée. L'effet considérable des corrections relativistes ne fait plus de doute.

Enfin, si nous considérons les deux corrections, nous obtenons le graphe représenté en bas à droite à la figure 5.21. Comme attendu, les corrections relativistes dominent et l'allure de la courbe e_1 finale est complètement dictée par ces effets. En effet, la période vaut $1.875 \cdot 10^4$ années, et l'amplitude est égale à $4.76 \cdot 10^{-7}$. En comparaison, la période de e_1 avec les deux corrections pour le système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter" était $2.74 \cdot 10^6$ années.

Il est à noter que toutes les quatre évolutions décrites ci-dessus, ainsi que toute autre envisagée peuvent être simplement déduites des figures 5.4 et 5.5, pourvu que la masse m_2 soit jumelle de Jupiter ou de la Terre respectivement. Les quatre systèmes étudiés sont placés sur les cartes des composantes hamiltoniennes (figure 5.22). Il est alors aisé de lire les ordres de grandeurs des trois composantes hamiltoniennes et d'en déduire l'impact de chacune sur l'évolution du système. Le premier système étudié à la section 5.3, "Soleil-Terre-Jupiter" est représenté par un point vert sur les trois cartes. Le deuxième système, "Soleil-Terre chaude-Jupiter" est, lui, dénoté par un point rouge. Le troisième système était le système "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter". Il est représenté par un point orange. Enfin, le système "Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter" est représenté par un point bleu. La différence de comportement entre le troisième système et le quatrième était visible sur ces différentes cartes. En effet, pour le troisième système (figure 5.22, point orange), nous lisons sur les trois cartes que

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{GR}} \rangle \sim 10^{-7.75} > \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle \sim 10^{-8.75} > \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{marée}} \rangle \sim 10^{-11.25}.$$

Ce sont donc les corrections de marée qui sont moins les moins importantes, et les corrections relativistes qui dominent les trois composantes hamiltoniennes.

Pour le quatrième système, où nous considérons un Jupiter très proche du Soleil, nous lisons sur les cartes (figure 5.22, point bleu) :

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{GR}} \rangle \sim 10^{-6.5} > \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{marée}} \rangle \sim 10^{-9} > \langle \tilde{\mathcal{H}}_{\text{octu}} \rangle \sim 10^{-9.5}.$$

C'est maintenant la composante hamiltonienne octupole qui est la plus faible. Les corrections relativistes sont encore les plus importantes, même si les corrections de marée sont, cette fois, plus significantes que la composante octupole.

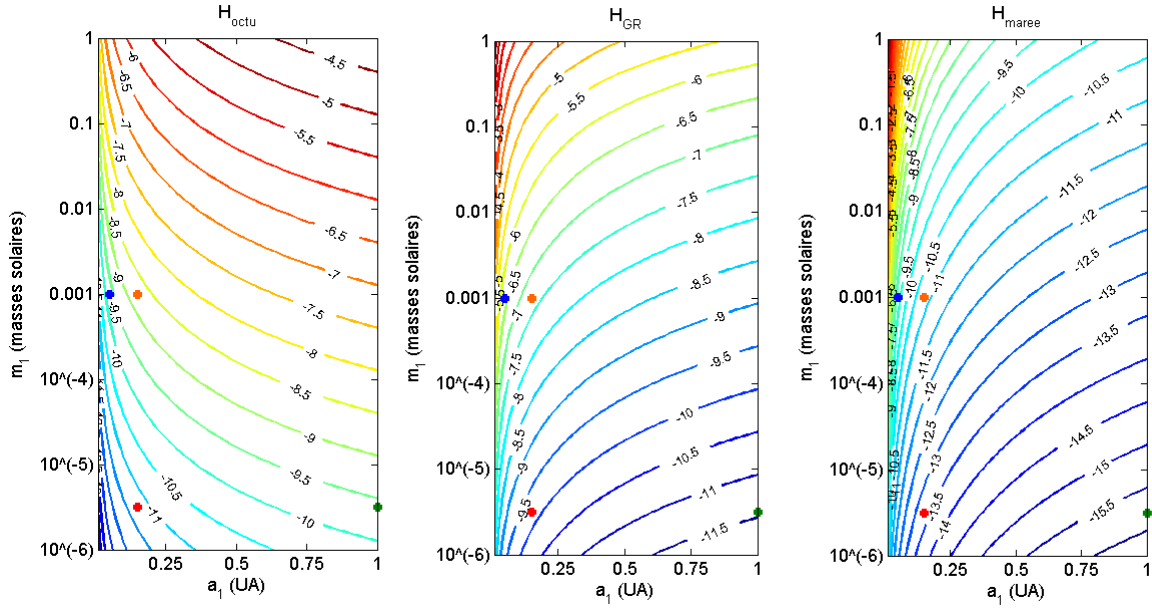


FIGURE 5.22 – Logarithme des valeurs des composantes hamiltoniennes dans le cas d'un système où $m_2 = 10^{-3} m_\odot$, $a_2 = 5 \text{ UA}$ et $e_1 = 0.01$. La masse m_1 varie entre $10^{-6} m_\odot$ et $1 m_\odot$. Le demi-grand axe a_1 varie entre 0.01 UA et 1 UA . Gauche : composante octupole. Centre : composante relativiste. Droite : composante de marée. "Soleil-Terre-Jupiter" : point vert. "Soleil-Terre chaude-Jupiter" : point rouge. "Soleil-Jupiter chaud-Jupiter" : point orange. "Soleil-Jupiter très chaud-Jupiter" : point bleu.

5.4 Importance de l'excentricité dans les résultats

Dans les quatre graphes tracés à la section 5.2, nous avons mis l'accent sur la variation de a_1 . Nous pouvons aussi nous concentrer sur la variation d'autres paramètres, comme, par exemple, l'excentricité du deuxième corps, e_1 . Nous allons analyser l'impact de la variation de e_1 sur le modèle "Soleil-Terre-Jupiter". Nous prenons tour à tour les valeurs suivantes :

1. $e_1=0.001$,
2. $e_1=0.1$,
3. $e_1=0.5$.

La figure 5.23 représente les composantes hamiltoniennes $\langle \mathcal{H}_{\text{octu}} \rangle$ (en bleu), $\langle \mathcal{H}_{\text{GR}} \rangle$ (en rouge) et $\langle \mathcal{H}_{\text{marée}} \rangle$ (en vert) pour $e_1 = 0.001$ (trait "◇"), $e_1 = 0.1$ (trait continu) et $e_1 = 0.5$ (trait discontinu) pour le système "Soleil-Terre-Jupiter". En traçant les composantes pour chaque excentricité sur le même graphe, nous pouvons facilement observer si la variation de l'excentricité a de l'influence sur les résultats. La figure 5.23 montre que e_1 n'influence quasiment pas les résultats.

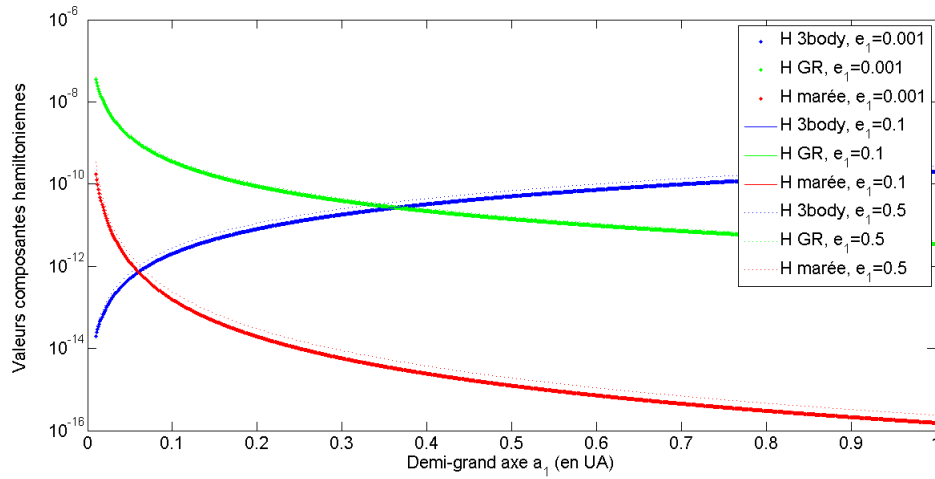


FIGURE 5.23 – Ordre de grandeur des composantes hamiltoniennes en fonction du demi-grand axe a_1 pour les excentricités $e_1 = 0.001$ (losange), $e_1 = 0.1$ (trait continu) et $e_1 = 0.5$ (trait discontinu), dans le cas d'un système "Soleil-Terre-Jupiter". Les simulations ont été réalisées tous les 0.001 UA . L'axe vertical est un axe logarithmique en base 10. Les composantes ont été tracées en valeur absolue

Dans le chapitre suivant, nous tiendrons compte des effets de marée dissipatives. Nous analyserons plus en profondeur le comportement de migration du deuxième corps près du corps central, au travers d'une étude statistique, afin de comprendre la formation des systèmes binaires.

Chapitre 6

Les effets de marée dans les étoiles binaires

Le travail présenté dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec A. Correia, lors du stage de la finalité approfondie à l'Université d'Aveiro.

Nous considérons dans ce chapitre le problème des trois corps que constitue une binaire éloignée avec une planète orbitant sur une orbite intérieure, autour de l'étoile primaire. A nouveau, nous travaillons avec des systèmes hiérarchiques, mais sans restriction sur les excentricités des deux orbites. Le but de ce chapitre est de comprendre l'influence des effets de marées dissipatives sur la période orbitale du deuxième corps en révolution autour de l'étoile mère.

L'objectif est tout d'abord de reproduire le résultat présenté dans l'article de Frabrycky [12] et ensuite d'essayer de comprendre précisément quels effets ont un rôle dans la figure qu'obtiennent les auteurs. En particulier, nous cherchons à comprendre l'accumulation de planètes à 3 jours de révolution observé dans [12]. Pour y parvenir, nous utilisons les équations de l'article de Correia et al. [7]. La génération des 70000 systèmes aléatoires suit ce qui a été fait dans [12].

Dans l'introduction, nous décrivons les nouveautés par rapport aux autres chapitres de ce travail. Dans la deuxième section, nous expliquons les équations utilisées pour reproduire les différentes figures de [12]. Nous utilisons une approche vectorielle dans les coordonnées de Jacobi, ce que nous détaillons aussi. Dans la troisième section, nous détaillons comment reproduire la principale figure de ce chapitre. Enfin, dans la dernière section, nous tentons de comprendre de quel terme des équations provient l'accumulation observée sur l'histogramme.

6.1 Introduction

Dans cette section, nous définissons les Jupiter chauds, les exoplanètes avec lesquelles nous travaillons dans ce chapitre. Nous expliquons aussi ce qu'est l'effet de Kozai et les effets de marées dissipatives.

6.1.1 Jupiter chauds

Nous commençons par définir les Jupiter chauds. Une Jupiter chaud est une exoplanète dont la masse est similaire à celle de Jupiter, mais qui est très proche de son étoile, d'où l'appellation "Jupiter chaud". Elles portent parfois le nom de "Pégasides". Ce sont aussi des géantes gazeuses. La distance entre une telle planète et son étoile est de l'ordre de 0.1 UA , soit une période orbitale d'environ dix jours. La plus connue est la première exoplanète ayant été découverte, 51 Pegasi b. La masse volumique de ces exoplanètes est souvent plus faible que la masse volumique des autres planètes. Si la densité est vraiment très faible, on parle parfois de "hot Saturn".

Ce sont les planètes les plus faciles à détecter, de par leur taille et leur proximité à l'étoile. Il est en effet plus facile de repérer une telle planète plutôt qu'une plus petite, dont l'effet sur l'étoile est encore moindre.

Une hypothèse de la formation des Jupiter chauds est qu'elles se soient formées loin de leur Soleil¹ et qu'elles aient ensuite migré. Dans ce cas, leur orbite est circularisée et les périodes orbitale et de rotation sont synchronisées. C'est ce phénomène qui nous intéresse dans ce travail. En effet, le but est de comprendre pourquoi certaines exoplanètes migrent pour avoir finalement une période orbitale d'environ trois jours.

Cette migration à trois jours a été observée par Fabrycky et Tremaine [12] dans leurs simulations numériques. Les auteurs ont constaté qu'un nombre non négligeable de systèmes conduisent à une période orbitale d'environ trois jours pour le corps de l'orbite intérieure. La figure 6.1-gauche est la figure obtenue par les auteurs. Cette figure représente les périodes initiales et finales de 70 000 systèmes fictifs après 10^{10} années.

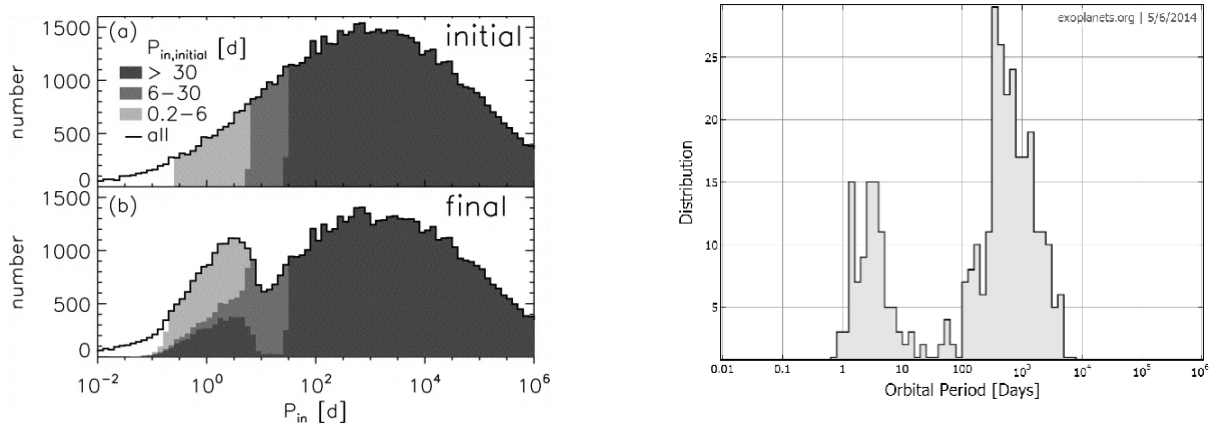


FIGURE 6.1 – Gauche : Histogrammes des périodes initiales (échelle logarithmique) et finales en jours du corps m_1 sur l'orbite intérieure. On constate une accumulation de périodes autour de 3 jours, figure issue de [12]. Droite : Histogramme des périodes finales en jours du corps m_1 sur l'orbite intérieure pour les exoplanètes dont la masse est supérieure à celle de Jupiter. Diagramme (échelle logarithmique) obtenu à partir de 352 systèmes, figure issue de [49]

1. Il n'y a pas assez de matériaux proches de l'étoile pour former une telle masse. En effet, le constituant le plus abondant, l'eau, s'y trouve sous forme de gaz et non sous forme de glace. C'est pourquoi on pense que les planètes n'ont pu se former que derrière la "ligne des glaces".

Le travail de Fabrycky et Tremaine est en accord avec les observations actuelles. En effet, avec les données fournies par le catalogue d'exoplanètes [49], nous obtenons la figure 6.1-droite. Cette figure a été réalisée avec toutes les exoplanètes observées qui ont une masse supérieure à celle de Jupiter dans cette base de données.

Notre but est donc d'obtenir la même figure, et une fois celle-ci reproduite, de déterminer quelles parties des équations influencent cette accumulation à trois jours.

6.1.2 Cycles de Kozai et "tidal friction"

Dans un problème des trois corps, les *cycles de Kozai* sont des oscillations extrêmes de l'inclinaison mutuelle et de l'excentricité du corps m_1 ². En effet,

$$\sqrt{1 - e_1^2} \cos i = cte$$

est conservé, et dès lors, si l'excentricité augmente, l'inclinaison doit diminuer, et vice versa.

L'angle minimal pour que ce mécanisme se produise est $\arccos(\sqrt{\frac{3}{5}}) = 39.23^\circ$. Cet angle est appelé l'angle de Kozai. L'inclinaison ne doit pas dépasser 140.8° . Si l'excentricité de m_1 est initialement nulle, alors son excentricité maximale sera approximativement $\sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 i_{\text{initial}}}$. La masse du troisième corps et sa distance par rapport au centre du système n'affectent pas l'amplitude des oscillations des cycles. Elles affectent seulement la période des cycles. L'amplitude est déterminée par l'excentricité et l'inclinaison mutuelle initiales.

Cependant, des effets tels que les marées dissipatives peuvent modifier les oscillations. En effet, avec une forte excentricité, même si le demi-grand axe de la planète n'est pas proche de zéro, la planète, quand elle passe au périastre, peut se retrouver assez proche du corps central. Dans ce cas, la dissipation d'énergie est assez importante pour entraîner une diminution du demi-grand axe. Cette diminution entraîne de plus forts effets de marée. Lorsque la distance entre la planète et l'étoile primaire est assez petite, l'excentricité de m_1 commence à décroître et tend vers zéro : l'orbite se circularise et la planète sort des cycles de Kozai. En même temps que l'excentricité, l'inclinaison arrête d'osciller et se stabilise aussi. Ce phénomène est appelé "cycles de Kozai avec tidal friction" ou migration de Kozai. C'est une hypothèse largement acceptée pour la formation des Jupiter chauds, ceux-ci ne pouvant pas naître si près de l'étoile, comme expliqué ci-dessus.

6.1.3 Marées dissipatives

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que les marées conservatives, mais en réalité, il y a dissipation d'énergie par les effets de marée. La déformation subie par le corps implique une dissipation d'énergie due aux frictions. Jusqu'à présent, nous avons considéré que les marées déformaient instantanément le corps qui les subissait. En réalité, le corps

2. Nous supposons ici que l'orbite du corps m_2 est fixe et telle que $i_2 = 0$. Ainsi, le problème moyenné sur les courtes périodes se réduit à un seul degré de liberté (e_1, ω_1) .

subissant la marée n'est pas parfaitement élastique, et ce dernier n'est complètement déformé qu'après un temps de décalage Δt (en anglais, *time delay*). Dans l'article de Mignard [25], qui nous sert de référence pour cette sous-section, Δt vaut environ 10 minutes.

Le bourrelet n'est plus aligné à la droite joignant les deux corps. La déformation peut soit être en avance, soit en retard, comme l'illustre la figure 6.2 ([3]). Le bourrelet n'étant pas aligné à la droite reliant les deux masses, un couple de marée apparaît. Il tend à synchroniser la révolution de la planète autour de l'étoile et la rotation de celle-ci sur elle-même.

Lorsque la rotation de m_0 sur lui-même est plus rapide que la révolution de m_1 autour de m_0 , le bourrelet sera en avance par rapport à m_1 . Dans ce cas, le couple de marée tend à ralentir la révolution de la planète. Dans le cas où la révolution orbitale de la planète est plus rapide que la rotation du corps primaire, le bourrelet est en retard. Dans ce cas, le couple de marée tend à accélérer la rotation de m_0 .

Nous travaillons avec un modèle où le temps de décalage Δt est constant. L'angle, ϵ , entre la direction des bourrelets et la direction de m_1 est proportionnel à ce temps.

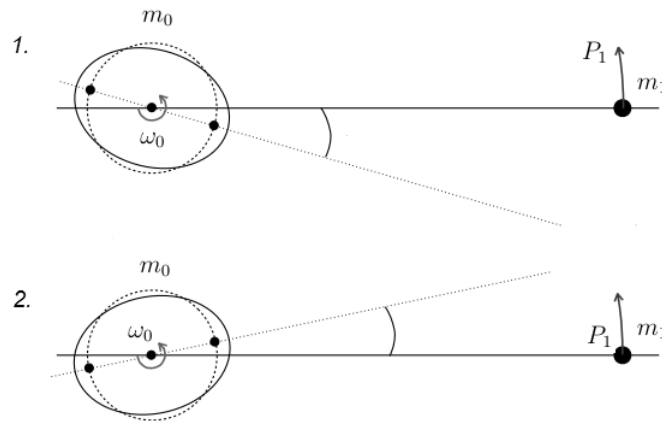


FIGURE 6.2 – Cas 1 : la rotation de m_0 est moins rapide que la rotation orbitale de m_1 . Le bourrelet est en retard par rapport à la direction de m_1 . Cas 2 : la rotation de m_0 est plus rapide que la rotation orbitale de m_1 . Le bourrelet est en avance par rapport à la direction de m_1

6.2 Équations du mouvement

Nous nous basons dans ce chapitre sur le formalisme vectoriel introduit dans l'article de Correia et al. [7]. Cette section introduit les équations du mouvement avec lesquelles nous allons travailler. Une fois celles-ci bien définies, nous reproduisons l'évolution d'un système de référence, HD 80606. Cette évolution est disponible dans [7] ainsi que dans [12].

Nous travaillons avec trois corps, m_0 , m_1 et m_2 . Nous utilisons les coordonnées de Jacobi.

L'orbite de m_1 autour de m_0 représente l'orbite intérieure. L'orbite extérieure est l'orbite de m_2 autour du centre de masse de m_0 et m_1 . Si \vec{x} est un vecteur alors nous noterons $\hat{\vec{x}}$ le vecteur unitaire correspondant. La norme du vecteur \vec{x} sera quant à elle notée x .

Les corps m_0 et m_1 sont approximés par des ellipsoïdes aplatis en rotation autour de l'axe de plus grande inertie dans les directions $\hat{\vec{s}}_0$ et $\hat{\vec{s}}_1$ et avec les taux de rotation ω_0 et ω_1 respectivement. Ainsi, J_{2_j} ($j = 0, 1$), qui avait été défini à l'équation (4.15) s'écrit dans nos notations actuelles tel que

$$J_{2_j} = \frac{k_{L_j} \omega_j^2 R_j^3}{3k^2 m_j}, \quad (j = 0, 1) \quad (6.1)$$

où k_{L_j} est le nombre de Love du corps m_j .

Nous définissons aussi quelques paramètres : $m_{01} = m_0 + m_1$, $\beta_1 = \frac{m_0 m_1}{m_{01}}$, $\beta_2 = \frac{m_{01} m_2}{m_{01} + m_2}$, $\mu_1 = k^2 m_{01}$ et $\mu_2 = k^2 (m_{01} + m_2)$. La position de m_1 est \vec{r}_1 alors que \vec{r}_2 est la position de m_2 par rapport au centre de masse de m_{01} . Nous supposons de plus que $\|\vec{r}_1\| \ll \|\vec{r}_2\|$ (système hiérarchique).

Les vecteurs principaux³ sont :

- Les moments angulaires de rotation \vec{L}_0 et \vec{L}_1 , associés aux corps m_0 et m_1 :

$$\vec{L}_j = C_j \omega_j \hat{\vec{s}}_j,$$

où ω_j est la vitesse angulaire de m_j , $\hat{\vec{s}}_j$ est un vecteur unitaire dans la direction de \vec{L}_j ($j = 0, 1$) et C_j ($j = 0, 1$) représente le moment principal d'inertie⁴ de m_j . Grâce aux vecteurs \vec{L}_j ($j = 0, 1$), nous tenons maintenant compte de la direction et de la norme de l'axe de rotation de m_j , ce qui n'était pas le cas dans les chapitres antérieurs.

- Les moments angulaires orbitaux \vec{G}_1 et \vec{G}_2 liés à chaque orbite :

$$\vec{G}_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j (1 - e_j^2)} \hat{\vec{k}}_j,$$

où $\hat{\vec{k}}_j$ est un vecteur unitaire dans la direction de \vec{G}_j ($j = 1, 2$). Grâce à \vec{G}_j ($j = 1, 2$), nous tenons maintenant compte de la direction des moments angulaires orbitaux, ce qui n'était pas le cas dans les précédents chapitres, car nous travaillions alors uniquement avec la norme de \vec{G}_j , à savoir, G_j .

- Le vecteur excentricité, aussi appelé vecteur de Laplace-Runge-Lenz, lié à l'orbite de m_1 autour de m_0 :

$$\vec{e}_1 = \frac{\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{G}_1}{\beta_1 \mu_1} - \frac{\vec{r}_1}{r_1}.$$

Ce vecteur pointe le long du grand-axe dans la direction du périastre. Sa norme e_1

3. Il s'agit de nouvelles définitions pour L_j et G_j . En effet, dans le deuxième chapitre de ce travail, L_j et G_j représentaient les moments associés aux variables de Delaunay.

4. Le moment principal d'inertie par rapport à un axe \vec{e} est une quantité liée à la rotation d'un corps selon cet axe. Elle dépend de la forme de l'objet et de sa masse. Ici, le moment principal d'inertie C_j est calculé par rapport à l'axe de rotation du corps m_j , le vecteur $\hat{\vec{s}}_j$. Nous considérons que l'axe principal d'inertie est confondu avec l'axe de rotation des deux corps m_0 et m_1 .

est simplement l'excentricité qui nous connaissons.

L'évolution des spins⁵ est donnée par \vec{L}_i ($i = 0, 1$) tandis que l'évolution des orbites est indiquée par \vec{e}_1 et \vec{G}_i ($i = 1, 2$).

Dans ce formalisme, le potentiel quadrupolaire, *i.e.* limité à l'ordre 2 en $\frac{r_1}{r_2}$ et $\frac{R_i}{r_j}$ ($i, j = 0, 1$), est donné par (e.g., Smart 1953 [43])

$$\begin{aligned} U_{\text{quad}} = & -k^2 \frac{m_0 m_1}{r_1} \left(1 - \sum_{j=0}^1 J_{2j} \left(\frac{R_j}{r_1} \right)^2 \mathcal{P}_2(\hat{r}_1 \cdot \hat{s}_j) \right) \\ & -k^2 \frac{m_{01} m_2}{r_2} \left(1 - \sum_{j=0}^1 J_{2j} \frac{m_j}{m_{01}} \left(\frac{R_j}{r_2} \right)^2 \mathcal{P}_2(\hat{r}_2 \cdot \hat{s}_j) \right) \\ & -k^2 \frac{\beta_1 m_2}{r_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \mathcal{P}_2(\hat{r}_2 \cdot \hat{r}_1), \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ est le polynôme de Legendre de degré 2. Le premier terme de cette expression est identique à l'équation (4.11) avec $n = 2$.

Le potentiel représentant les effets de marée conservatifs et dissipatifs pour la paire de corps m_0 et m_1 seulement, est

$$U_{\text{marée}} = -\frac{k^2}{r_1^3} \sum_{j=0}^1 k_{L_j} m_{(1-j)}^2 \frac{R_j^5}{r_1^3} \mathcal{P}_2(\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2),$$

où $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1(t - \Delta t_j) + \Delta t_j \omega_j \hat{s}_j \times \vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \Delta t_j (\omega_j \hat{s}_j \times \vec{r}_1 - \dot{\vec{r}}_1)$ et r'_1 est la position du corps m_1 après un temps Δt_1 par rapport à la perturbation initiale. C'est le temps nécessaire pour que le corps soit déformé au maximum. Nous ne démontrons pas comment obtenir le potentiel de marée. L'ouvrage [5] contient tous les détails et développements de ce potentiel. Ce potentiel $U_{\text{marée}}$ est identique au potentiel de marée U_{01} que nous avons calculé au Chapitre 4 (équation 4.31), la seule différence étant que nous avons alors considéré $r_1 = r'_1$ dans celle-ci. Ce n'est plus le cas ici, suite à l'introduction du temps de décalage Δt_1 .

La contribution de la relativité ne modifie que $\dot{\vec{e}}_1$. Nous le réécrivons sous la forme (e.g., Schutz 1985 [41])

$$\dot{\vec{e}}_1 = -\frac{3\mu_1 n_1}{c^2 a_1 (1 - e_1^2)} \hat{k}_1 \times \vec{e}_1.$$

En s'intéressant uniquement à la norme de cette expression, nous retrouvons bien l'ex-

5. Le spin d'un corps caractérise la rotation de ce corps sur lui-même, c'est-à-dire à la fois sa vitesse de rotation et la direction de son axe de rotation.

pression (3.28) :

$$\dot{g}_{GR} = \frac{3\mu_1^{3/2}}{c^2 a_1^{5/2} (1 - e_1^2)}$$

que nous avons calculée au Chapitre 3.

Les effets de marée dissipatifs impliquent que l'Hamiltonien du système n'est plus conservé. Il n'est dès lors plus possible de procéder de manière identique à celle des premiers chapitres de notre travail. Pour obtenir les équations du mouvement, on considère $U' = U + \frac{k^2 m_0 m_1}{r} + \frac{k^2 m_0 m_2}{r}$. Du potentiel U' , on dérive les forces \vec{F}_i :

$$\vec{F}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} U'.$$

A l'aide de celles-ci, nous obtenons les équations du mouvement :

$$\dot{\vec{G}}_j = \vec{r}_j \times \vec{F}_j, \quad (6.2)$$

$$\dot{\vec{e}}_1 = \frac{1}{\beta_1 \mu_1} \left(\vec{F}_1 \times \frac{\vec{G}_1}{\beta_1} + \dot{\vec{r}}_1 \times \dot{\vec{G}}_1 \right), \quad (6.3)$$

$$\dot{\vec{L}}_0 + \dot{\vec{L}}_1 = -\dot{\vec{G}}_1 - \dot{\vec{G}}_2. \quad (6.4)$$

L'équation (6.4) découle de la conservation du moment angulaire total. En effet, la quantité $\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{L}_0 + \vec{L}_1$ est constante en coordonnées de Jacobi. Pour obtenir les expressions $\dot{\vec{L}}_0$ et $\dot{\vec{L}}_1$, il suffit de calculer $\dot{\vec{G}}_i$ et de différencier ce qui dépend de m_0 et de m_1 .

La méthode est identique, qu'on travaille avec le potentiel quadrupolaire ou avec le potentiel des effets de marée. Dans ce dernier cas, il suffit de remplacer U' par $U_{\text{marée}}$ afin de calculer les forces de marée à insérer dans les équations du mouvement. Une fois les équations trouvées, nous les moyennons sur les courtes périodes, comme dans les chapitres antérieurs. Les calculs sont présentés brièvement à l'Annexe E. Nous obtenons les équations suivantes.

Le moment angulaire de rotation de m_j ($j = 0, 1$) :

$$\dot{\vec{L}}_j = \left(\dot{\vec{L}}_j \right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{L}}_j \right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\begin{cases} \left(\dot{\vec{L}}_j \right)_{\text{spin}} = -\alpha_{1j} \cos \theta_j \hat{k}_1 \times \hat{s}_j - \alpha_{2j} \cos \epsilon_j \hat{k}_2 \times \hat{s}_j, \\ \left(\dot{\vec{L}}_j \right)_{\text{marée dissipative}} = K_j n_1 \left(f_4(e_1) \sqrt{1 - e_1^2} \frac{\omega_j}{2n_1} (\hat{s}_j - \cos \theta_j \hat{k}_1) - f_1(e_1) \frac{\omega_j}{n_1} \hat{s}_j + f_2(e_1) \hat{k}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j)(6 + e_1^2)}{4(1 - e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{\omega_j}{n_1} \vec{e}_1 \right). \end{cases}$$

Le vecteur excentricité \vec{e}_1 :

$$\dot{\vec{e}}_1 = \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{3b}} + \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{GR}} + \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{marée conservative}} + \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{3b}} = -\gamma \frac{(1-e_1^2)}{G_1} \left(\cos i \hat{k}_2 \times \vec{e}_1 - 2 \hat{k}_1 \times \vec{e}_1 - 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 \right), \\ \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{spin}} = -\sum_{j=0}^1 \frac{\alpha_{1j}}{G_1} \left(\cos \theta_j \hat{s}_j \times \vec{e}_1 + \frac{1}{2}(1 - 5 \cos^2 \theta_j) \hat{k}_1 \times \vec{e}_1 \right), \\ \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{GR}} = \frac{3\mu_1 n_1}{c^2 a_1 (1-e_1^2)} \hat{k}_1 \times \vec{e}_1, \\ \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{marée conservative}} = \sum_{j=0}^1 \frac{15}{2} k_{L_j} n_1 \frac{m_{(1-j)}}{m_j} \left(\frac{R_j}{a_1} \right)^5 f_4(e_1) \hat{k}_1 \times \vec{e}_1, \\ \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{marée dissipative}} = -\sum_{j=0}^1 \frac{K_j}{\beta_1 a_1^2} \left\{ f_4(e_1) \frac{\omega_j}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \hat{k}_1 - \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_j \frac{\omega_j}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) \vec{e}_1 \right\}, \end{array} \right.$$

où la norme de $\left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{marée conservative}}$ est égale à l'expression de \dot{g}_{TB} trouvée au Chapitre 4 (équation 4.35).

Le moment angulaire de l'orbite de m_1 :

$$\dot{\vec{G}}_1 = \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{3b}} + \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{3b}} = -\gamma(1-e_1^2) \cos i \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 + 5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \vec{e}_1, \\ \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{spin}} = -\alpha_{10} \cos \theta_0 \hat{s}_0 \times \hat{k}_1 - \alpha_{11} \cos \theta_1 \hat{s}_1 \times \hat{k}_1, \\ \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{marée dissipative}} = -\left(\dot{\vec{L}}_1\right)_{\text{marée dissipative}} - \left(\dot{\vec{L}}_0\right)_{\text{marée dissipative}}. \end{array} \right.$$

Le moment angulaire de l'orbite de m_2 (les marées n'agissent que sur la paire de corps m_0 et m_1) :

$$\dot{\vec{G}}_2 = \left(\dot{\vec{G}}_2\right)_{\text{3b}} + \left(\dot{\vec{G}}_2\right)_{\text{spin}} = -\dot{\vec{G}}_1 - \dot{\vec{L}}_0 - \dot{\vec{L}}_1,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\vec{G}}_2\right)_{\text{3b}} = -\gamma(1-e_1^2) \cos i \hat{k}_1 \times \hat{k}_2 + 5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \vec{e}_1 \times \hat{k}_2, \\ \left(\dot{\vec{G}}_2\right)_{\text{spin}} = -\alpha_{20} \cos \theta_0 \hat{s}_0 \times \hat{k}_2 - \alpha_{21} \cos \theta_1 \hat{s}_1 \times \hat{k}_2, \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_1(e_1) &= \frac{1 + 3e_1^2 + \frac{3}{8}e_1^4}{(1 - e_1^2)^{\frac{9}{2}}} & \alpha_{1j} &= \frac{3k^2 m_0 m_1 J_{2j} R_j^2}{2a_1^3 (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} (j = 0, 1) \\
 f_2(e_1) &= \frac{1 + \frac{15}{2}e_1^2 + \frac{45}{8}e_1^4 + \frac{5}{16}e_1^6}{(1 - e_1^2)^6} & \alpha_{2j} &= \frac{3k^2 m_2 m_j J_{2j} R_j^2}{2a_2^3 (1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}} (j = 0, 1) \\
 f_4(e_1) &= \frac{1 + \frac{3}{2}e_1^2 + \frac{1}{8}e_1^4}{(1 - e_1^2)^5} & \gamma &= \frac{3k^2 m_2 \beta_1 a_1^2}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 f_5(e_1) &= \frac{1 + \frac{15}{4}e_1^2 + \frac{15}{8}e_1^4 + \frac{5}{64}e_1^6}{(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}},
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$K_j = \frac{3\Delta t_j k_{L_j} k^2 m_{(1-j)}^2 R_j^5}{a_1^6} (j = 0, 1), \quad (6.5)$$

et

$$\cos i = \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2, \quad \cos \epsilon_j = \hat{s}_j \cdot \hat{k}_2, \quad \cos \theta_j = \hat{s}_j \cdot \hat{k}_1 \quad (j = 0, 1).$$

Rappelons que \hat{k}_j est le vecteur unitaire de \vec{G}_j ($j = 1, 2$) et \hat{s}_j est le vecteur unitaire de \vec{L}_j ($j = 0, 1$). L'indice "3b" correspond au mouvement des trois corps, sans aucune correction. L'indice "GR" correspond à la partie relativiste des équations. L'indice "spin" correspond à la partie liée aux axes de rotation des corps m_0 et m_1 . L'indice "marée conservative" correspond à la partie des équations exprimant les marées conservatives. Enfin, l'indice "marée dissipative" correspond à la partie des équations traitant des marées dissipatives. L'angle i est l'inclinaison entre les deux orbites. θ_j ($j = 0, 1$) sont les obliquités par rapport au plan orbital de m_1 , c'est-à-dire θ_0 est l'angle entre le spin de m_0 et l'orbite de la planète m_1 ; θ_1 est l'angle entre l'axe du spin de m_1 et le plan de son orbite. ϵ_j ($j = 0, 1$) sont les obliquités par rapport au plan orbital de m_2 .

Grâce à ces équations moyennées, nous sommes en mesure de reproduire les figures de [7]. De façon à implémenter les équations, nous devons choisir un référentiel inertiel dans lequel nous pouvons écrire le vecteur excentricité, les moments angulaires orbitaux et les moments angulaires de rotation. Pour faciliter la suite de notre travail, nous choisissons un repère inertiel lié à l'orbite du corps m_2 . L'axe \vec{e}_3 est choisi comme étant la direction du moment angulaire orbital du corps m_2 :

$$\hat{k}_2 = (0, 0, 1).$$

Les axes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ne sont pas donnés explicitement. Nous exprimons les autres vecteurs en fonction de \hat{k}_2 et des matrices de rotation :

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_1 &= R_z(\Omega_1) R_x(i) \hat{k}_2, \\
 \vec{e}_1 &= R_z(\Omega_1) R_x(i) R_z(\varpi_1) R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{k}_2, \\
 \hat{s}_0 &= R_z(\psi_0) R_x(\epsilon_0) \hat{k}_2 = R_z(\phi_0) R_x(\theta_0) \hat{k}_1, \\
 \hat{s}_1 &= R_z(\psi_1) R_x(\epsilon_1) \hat{k}_2 = R_z(\phi_1) R_x(\theta_1) \hat{k}_1.
 \end{aligned}$$

Il existe deux manières de décrire \hat{s}_i dans le référentiel choisi : soit à partir des angles ϕ_j , l'angle de précession, et θ_j et du vecteur \hat{k}_1 , soit à partir des angles ψ_j et ϵ_j et du vecteur \hat{k}_2 . La figure ⁶ 6.3 représente les vecteurs \vec{L}_j ($j = 0, 1$), ainsi que les angles permettant de les repérer par rapport à \vec{G}_1 . Pour obtenir les expressions de \vec{s}_j (\vec{L}_j) à partir de \hat{k}_2 , nous utilisons les angles ψ_j et ϵ_j . Bien que ces angles ne soient pas représentés sur la figure, nous pouvons obtenir ces nouveaux angles de manière analogue à celle présentée pour les angles ϕ_j et θ_j . En effet, ψ_j est l'équivalent de ϕ_j , mesuré à partir de \hat{k}_2 et non plus à partir de \hat{k}_1 . De même l'angle θ_j est remplacé par l'angle ϵ_j , mesurant ainsi les valeurs à partir du vecteur \hat{k}_2 . L'angle ϖ_1 , longitude du périastre et argument du périastre⁷, permet de repérer le vecteur excentricité dans le plan de l'orbite de m_1 . L'angle Ω_1 , longitude du noeud ascendant, permet de repérer la direction du moment angulaire orbital \hat{k}_1 .

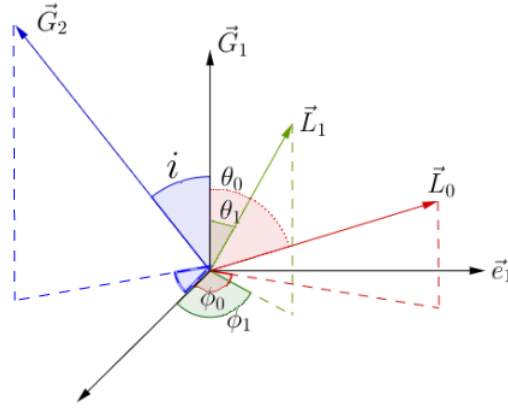


FIGURE 6.3 – Représentation de \vec{L}_j ($j = 0, 1$), \vec{G}_1 , \vec{G}_2 et \vec{e}_1 dans le cas où on exprime \hat{s}_j (\vec{L}_j) à partir de \hat{k}_1 (\vec{G}_1)

Il suffit maintenant d'initialiser les vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{L}_j &= C_j w_j \hat{s}_j \quad (j = 0, 1) \\ \vec{G}_1 &= G_1 \hat{k}_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)} \hat{k}_1 \\ \vec{e}_1 &= e_1 \hat{e}_1\end{aligned}$$

et de les faire évoluer grâce aux équations développées ci-dessus. En tout temps, on peut retrouver les éléments orbitaux comme suit :

6. Notons qu'une figure où le vecteur \hat{k}_2 est l'axe \vec{e}_3 aurait dû aussi être tracée, de façon à visualiser correctement les vecteurs \hat{k}_1 et \vec{e}_1 dans la bonne base, cependant cette figure était plus ardue à réaliser et beaucoup moins claire que la figure 6.3.

7. On a $\varpi = \Omega_1 + \omega_1$, où ω_1 est l'argument du périastre. Cependant, $\Omega_1 = 0$, et dès lors l'argument du périastre coïncide avec la longitude du périastre.

$$\begin{aligned}
\hat{k}_1 &= \frac{\vec{G}_1}{G_1} & \hat{k}_2 &= \frac{\vec{G}_2}{G_2} \\
\hat{s}_1 &= \frac{\vec{L}_1}{L_1} & \hat{s}_0 &= \frac{\vec{L}_0}{L_0} \\
a_1 &= \frac{G_1}{\beta_1^2 \mu_1 (1-e_1^2)} & P_1 &= \sqrt{\frac{a_1^3}{m_0+m_1}} \\
i &= \arccos(\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2) & P_{rot,1} &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\
\theta_j &= \arccos(\hat{s}_j \cdot \hat{k}_1) & \text{Vitesse de rotation : } \omega_j &= \frac{\vec{L}_j \cdot \hat{s}_j}{C_j},
\end{aligned}$$

où P_1 est la période orbitale de m_1 et $P_{rot,1}$ est la période de rotation de m_1 sur lui-même.

Nous faisons évoluer un système, HD80606, dont les paramètres sont repris aux tables 6.1 et 6.2, le même système que dans [7] afin de valider notre implémentation en comparant les évolutions.

Variables	m_0	m_1	m_2
Masse m_j	$1.1 m_\odot$	$0.0037 m_\odot$	$1.1 m_\odot$
Rayon R_j	0.0046 UA	$5.0134 \cdot 10^{-4} \text{ UA}$	-
Période de rotation $P_{rot,j}$	0.0548 années	0.0014 années	-
Obliquité θ_j	10°	35°	-
Précession ϕ_j	0°	0°	-
Inertie C_j	$0.08 m_0 R_0^2$	$0.08 m_1 R_1^2$	-
Nombre de Love k_{L_j}	0.028	0.51	-
Δt_j	$3.1688 \cdot 10^{-9}$ années	$1.2675 \cdot 10^{-6}$ années	-

TABLE 6.1 – Conditions initiales des trois corps ($j = 0, 1, 2$) du système HD80606 (Correia et al. [7], Fabrycky et Tremaine [12])

Variables	Orbite 1	Orbite 2
Demi-grand axe a_j	5 UA	1000 UA
Excentricité e_j	0.1	0.5
Longitude du périastre ϖ_j	0°	-
Inclinaison mutuelle i	58.6°	

TABLE 6.2 – Conditions initiales des deux orbites ($j = 1, 2$) du système HD 80606 (Correia et al. [7], Fabrycky et Tremaine [12])

Nous obtenons les graphes représentés à la figure 6.4. Nous intégrons les équations jusqu'à $5 \cdot 10^9$ années. L'intégrateur, est, comme précédemment, Runge Kutta d'ordre 4. Le pas

utilisé est 10 ans. Pour cette figure, nous avons testé plusieurs pas d'intégration : 1, 10 et 100 ans. Avec le pas égal à 100 ans, seule la partie des cycles de Kozai est bien reproduite. Dès que le corps sort des cycles, le pas trop grand ne permet plus d'obtenir la bonne figure. Les pas de 10 et 1 ans reproduisent de la même façon la figure 6.4. Nous avons donc choisi de garder un pas de 10 ans.

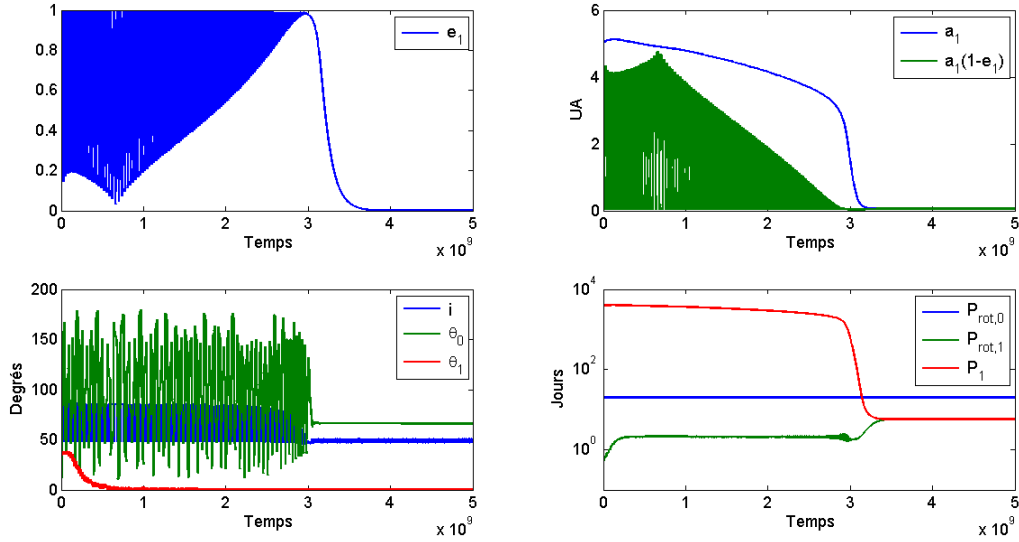


FIGURE 6.4 – Évolution de la masse m_1 du système HD80606. Évolutions de l'excentricité e_1 , du demi-grand axe a_1 , des angles θ_0 et θ_1 , de l'inclinaison mutuelle, des périodes de rotation des corps m_0 ($P_{\text{rot},0}$) et m_1 ($P_{\text{rot},1}$) et enfin de la période orbitale de m_1 (P_1).

L'inclinaison initiale est assez élevée, et l'excentricité vaut 0.1. Le demi-grand axe initial, 5 UA, n'est pas assez petit pour que les marées soient importantes sans contribution extérieure. Ici, la contribution est la forte excentricité, qui va permettre aux deux corps de se rapprocher malgré la valeur initiale de a_1 . Pour cette inclinaison et cette excentricité, les cycles de Kozai vont se produire. L'excentricité subit les cycles de Kozai jusqu'à environ $3 \cdot 10^9$ années et varie donc fortement. L'oscillation de l'inclinaison est corrélée à l'oscillation de l'excentricité dans les cycles de Kozai, et varie donc aussi jusqu'à ce temps. A partir de là, l'excentricité décroît et tend vers zéro. Dès $3 \cdot 10^9$ années, le demi-grand axe a_1 est déjà quasiment à sa valeur finale. Les auteurs estiment⁸ que le demi-grand axe final est égal à 0.07 UA, C'est-à-dire une période orbitale de 6.5 jours. Cette approximation ne peut-être appliquée que lorsque l'excentricité est sortie des cycles de Kozai, et donc seulement à partir de $3 \cdot 10^9$ années. La sortie de ces cycles grâce à la friction des marées permet aux autres variables de se stabiliser : le demi-grand axe, la période orbitale de

8. La formule utilisée pour approximer le demi-grand axe final est

$$a_F = a_1(1 - e_1^2) \simeq 0.07 \text{ UA}.$$

Celle-ci provient de l'article de Correia et Laskar [6]. Une explication détaillée est disponible dans cet article.

m_1 , les périodes de rotation de m_0 et m_1 , l'inclinaison et les angles θ_0 et θ_1 . L'inclinaison se stabilise autour de 50° . La dissipation implique une diminution du demi-grand axe. Plus le demi-grand axe diminue, plus les effets de marée sont importants. Ce mécanisme s'arrête quand l'orbite commence à se circulariser. C'est à partir de ce temps que toutes les variables sont constantes. Les variables se stabilisent et les périodes orbitale et de rotation de m_1 se synchronisent. Elles valent alors 5.73 jours.

Ce sont exactement ces systèmes qui nous intéresseront plus tard. En effet, pour ces systèmes, la période orbitale de m_1 est initialement assez importante. Grâce aux cycles de Kozai et à la friction des marées, la période finale est située entre 1 et 10 jours. Ce sont donc ces systèmes qui forment le pic présent dans les résultats de Fabrycky et Tremaine [12] et dans les observations réelles des exoplanètes. Remarquons que pour tous les systèmes qui seraient encore dans les cycles de Kozai à la fin de l'intégration, la période P_1 reste plus ou moins constante.

Reproduire ces figures permet de valider la justesse de notre implémentation des équations. Nous pouvons donc maintenant passer à la génération de systèmes aléatoires. Dans la suite de ce travail, nous nous baserons sur l'article de Fabrycky et Tremaine [12] et tenterons de reproduire leurs résultats.

6.3 Comparaison des deux systèmes d'équations

Afin d'être certain que les équations avec lesquelles nous travaillons sont équivalentes à celles de Fabrycky et Tremaine [12], nous décidons de comparer l'ensemble d'équations obtenues à la section précédente aux leurs.

Avant de détailler celles-ci, introduisons les vecteurs de base utilisés par [12], notre première étape étant d'écrire tous les vecteurs dans une base commune. Nous choisissons d'écrire nos vecteurs dans la base proposée par Fabrycky et Tremaine [12] :

$$(\hat{q}_1, \hat{h}_1, \hat{e}_1),$$

où ⁹ $\hat{q}_1 = \frac{\hat{G}_1}{\beta_1} \times \hat{e}_1$ et $\hat{h}_1 = \frac{\hat{G}_1}{\beta_1}$. Alors que nous notons la direction du moment angulaire orbital \hat{k}_j , il sera donc maintenant noté \hat{h}_j . Les spins de m_0 et m_1 , notés \vec{L}_j dans notre travail sont ici notés $C_j \vec{\Omega}_j$ et dès lors, $\vec{\Omega}_j = \omega_j \hat{s}_j$. Aussi, nous avons :

$$\frac{\Omega_{je}}{\omega_j} = \hat{s}_j \cdot \hat{e}_1,$$

$$\frac{\Omega_{jh}}{\omega_j} = \hat{s}_j \cdot \hat{k}_1 = \cos \theta_j,$$

$$\frac{\Omega_{jq}}{\omega_j} = \hat{s}_j \cdot \hat{q}_1.$$

9. Remarque : $\hat{q} = \hat{h} \times \hat{e}$, $\hat{e} = \hat{q} \times \hat{h}$ et $\hat{h} = \hat{e} \times \hat{q}$.

Les vecteurs \hat{s}_j et \hat{k}_j s'expriment dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned}\hat{s}_j &= (\hat{s}_j \cdot \hat{h}_1) \hat{h}_1 + (\hat{s}_j \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\hat{s}_j \cdot \hat{q}_1) \hat{q}_1 = \frac{\Omega_{jh}}{\omega_j} \hat{h}_1 + \frac{\Omega_{je}}{\omega_j} \hat{e}_1 + \frac{\Omega_{jq}}{\omega_j} \hat{q}_1, \\ \hat{k}_2 &= (\hat{k}_2 \cdot \hat{h}_1) \hat{h}_1 + (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \hat{q}_1 = \cos i \hat{h}_1 + (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \hat{q}_1 + (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1, \\ \hat{k}_1 &= \hat{h}_1.\end{aligned}$$

Dès lors, les produits vectoriels s'écrivent :

$$\hat{k}_1 \times \hat{k}_2 = (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{q}_1 - (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \hat{e}_1 \quad (6.6)$$

$$\hat{s}_j \times \hat{k}_1 = -\frac{\Omega_{je}}{\omega_j} \hat{q}_1 + \frac{\Omega_{jq}}{\omega_j} \hat{e}_1 \quad (6.7)$$

$$\hat{k}_2 \times \hat{e}_1 = \cos i \hat{q}_1 - (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \hat{h}_1 \quad (6.8)$$

$$\hat{s}_j \times \hat{e}_1 = \frac{\Omega_{jh}}{\omega_j} \hat{q}_1 - \frac{\Omega_{jq}}{\omega_j} \hat{h}_1 \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}\hat{k}_2 \times \hat{s}_j &= \frac{1}{\omega_j} \left\{ \left[-\cos i \Omega_{jq} + (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{jh} \right] \hat{e}_1 + \left[\cos i \Omega_{je} - (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{jh} \right] \hat{q}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left[(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{jq} - (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{je} \right] \hat{h}_1 \right\}.\end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les équations.

6.3.1 Vecteur excentricité

Commençons par $\dot{\vec{e}}_1$. Pour rappel, dans notre travail :

$$\dot{\vec{e}}_1 = \left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{3b}} + \left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{GR}} + \left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{marée conservative}} + \left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{3b}} = -\gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} \left(\cos i \hat{k}_2 \times \vec{e}_1 - 2 \hat{k}_1 \times \vec{e}_1 - 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 \right) \quad (6.11)$$

$$\left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{spin}} = -\sum_{j=0}^1 \frac{\alpha_{1j}}{G_1} \left(\cos \theta_j \hat{s}_j \times \vec{e}_1 + \frac{1}{2} (1 - 5 \cos^2 \theta_j) \hat{k}_1 \times \vec{e}_1 \right) \quad (6.12)$$

$$\left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{GR}} = \frac{3\mu_1 n_1}{c^2 a_1 (1 - e_1^2)} e_1 \hat{q}_1 \quad (6.13)$$

$$\left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{marée conservative}} = \sum_{j=0}^1 \frac{15}{2} k_{Lj} n_1 \frac{m_{(1-j)}}{m_j} \left(\frac{R_j}{a_1} \right)^5 f_4(e_1) e_1 \hat{q}_1 \quad (6.14)$$

$$\left(\dot{\vec{e}}_1 \right)_{\text{marée dissipative}} = -\sum_{j=0}^1 \frac{K_j}{\beta_1 a_1^2} \left\{ \underbrace{f_4(e_1) \frac{\omega_j}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \hat{k}_1}_{A} - \underbrace{\left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_j \frac{\omega_j}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) \vec{e}_1}_{B} \right\}, \quad (6.15)$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha_{1j} &= \frac{3k^2 m_0 m_1 J_{2j} R_j^2}{2a_1^3 (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} (j = 0, 1) & f_1(e_1) &= \frac{1 + 3e_1^2 + \frac{3}{8}e_1^4}{(1 - e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \\
\alpha_{2j} &= \frac{3k^2 m_2 m_j J_{2j} R_j^2}{2a_2^3 (1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}} (j = 0, 1) & f_2(e_1) &= \frac{1 + \frac{15}{2}e_1^2 + \frac{45}{8}e_1^4 + \frac{5}{16}e_1^6}{(1 - e_1^2)^6} \\
\gamma &= \frac{3k^2 m_2 \beta_1 a_1^2}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}} & f_4(e_1) &= \frac{1 + \frac{3}{2}e_1^2 + \frac{1}{8}e_1^4}{(1 - e_1^2)^5} \\
K_j &= \frac{3\Delta t_j k_{L_j} k^2 m_{(1-j)}^2 R_j^5}{a_1^6} (j = 0, 1) & f_5(e_1) &= \frac{1 + \frac{15}{4}e_1^2 + \frac{15}{8}e_1^4 + \frac{5}{64}e_1^6}{(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Dans l'article de Fabrycky et Tremaine, les auteurs ont

$$\dot{\hat{e}}_1 = \left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{3b}} + \left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{spin et marée}} + \left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{GR}} + \left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{3b}} = -(1 - e_1^2) \left[5S_{eq}\hat{e}_1 - (4S_{ee} - S_{qq})\hat{q}_1 + S_{qh}\hat{h}_1 \right] \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{spin et marée}} &= \sum_{j=0}^1 Z_j \hat{q}_1 - \sum_{j=0}^1 Y_j \hat{h}_1 - \sum_{j=0}^1 V_j \hat{e}_1 \\
&= \sum \left\{ \underbrace{\frac{m_1 k_{L_j} R_j^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{2\Omega_{j\,h}^2 - \Omega_{j\,e}^2 - \Omega_{j\,q}^2}{2(1 - e_1^2)^2}}_{Z_{j\text{spin}}} + \underbrace{\frac{m_1 k_{L_j} R_j^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{15k^2 m_1}{a_1^3} f_4(e_1)}_{Z_{j\text{marée}}} \right\} \hat{q}_1 \\
&\quad - \sum \left\{ \underbrace{-\frac{m_1 k_{L_j} R_j^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{j\,h} \Omega_{j\,q}}{(1 - e_1^2)^2}}_{Y_{j\text{spin}}} + \underbrace{\frac{\Omega_{j\,e}}{2n_1 t_{F_j}} f_4(e_1)}_{Y_{j\text{marée}}} \right\} \hat{h}_1 \\
&\quad - \sum \left\{ \frac{9}{t_{F_j}} \left\{ f_5(e_1) - \frac{11\Omega_{j\,h}}{18n_1} f_4(e_1) \right\} \right\} \hat{e}_1 \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\left(\dot{\hat{e}}_1\right)_{\text{GR}} = Z_{GR} \hat{q}_1 = \frac{3\mu_1^{3/2}}{a_1^{5/2} c^2 (1 - e_1^2)} \hat{q}_1. \quad (6.18)$$

et ($j = 0, 1$)

$$S_{eq} = \frac{-(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{\tau \sqrt{1 - e_1^2}} = \frac{-3a_1^{3/2} m_2 k^2 (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \quad (6.19)$$

$$S_{ee} = \frac{1}{3\tau \sqrt{1 - e_1^2}} \left\{ 1 - 3(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2 \right\} = \frac{a_1^{3/2} m_2 k^2}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \left\{ 1 - 3(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2 \right\} \quad (6.20)$$

$$S_{qq} = \frac{1}{3\tau \sqrt{1 - e_1^2}} \left\{ 1 - 3(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)^2 \right\} = \frac{a_1^{3/2} m_2 k^2}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \left\{ 1 - 3(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)^2 \right\} \quad (6.21)$$

$$S_{qh} = \frac{-(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{k}_1)}{\tau \sqrt{1 - e_1^2}} = \frac{-3a_1^{3/2} m_2 k^2 \cos i (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3a_1^{3/2} m_2 k^2}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \quad (6.23)$$

$$\frac{1}{t_{F_j}} = \frac{9}{t_{V_j}} \left(\frac{R_j}{a_1} \right)^8 \frac{(m_0 + m_1)m_{(1-j)}(1 + k_{L_j})^2}{m_j^2} = \frac{3k^2 \Delta t_j k_{L_j} (m_0 + m_1)m_{(1-j)} R_j^5}{a_1^8 m_j} \quad (6.24)$$

$$t_{V_j} = \frac{3(1 + k_{L_j})^2 R_j^3}{k^2 m_j \Delta t_j k_{L_j}}. \quad (6.25)$$

Pour alléger les expressions, nous ne comparons que les termes en $j = 0$. Un facteur e_1 supplémentaire est bien sûr présent dans toutes nos expressions, lié au fait que nous étudions \vec{e}_1 et non $\dot{\vec{e}}_1$ comme dans l'article de Fabrycky et Tremaine [12]. Comparons les marées conservatives (équation (6.14) et équation (6.17) : $[Z_{0_{\text{marée}}} \hat{q}_1]$). Premièrement, (6.14) :

$$\frac{15k_{L_0} \sqrt{k^2(m_0 + m_1)} m_1 R_0^5}{2a_1^{3/2} m_0 a_1^5} f_4(e_1) e_1 \hat{q}_1,$$

ensuite, $[Z_{0_{\text{marée}}} \hat{q}_1]$:

$$\frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{15k^2 m_1}{a_1^3} f_4(e_1) \hat{q}_1 = \frac{15m_1 k_{L_0} R_0^5 a_1^{3/2} k^2 (m_0 + m_1) m_1}{2m_0 m_1 \sqrt{k^2(m_0 + m_1)} a_1^8} f_4(e_1) \hat{q}_1,$$

et les deux expressions sont bien équivalentes.

Attaquons-nous maintenant aux marées dissipatives. Commençons avec les équations (6.15)_A et (6.17) ($= [-Y_{0_{\text{marée}}} \hat{h}_1]$). Premièrement, (6.15)_A :

$$-\frac{K_0}{\beta_1 a_1^2} f_4(e_1) \frac{\omega_0}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_0) \hat{k}_1 = -\frac{3k^2 (m_0 + m_1) \Delta t_0 k_{L_0} R_0^5 m_1^2 e_1 \Omega_{0e}}{2a_1^8 m_0 m_1 n_1} f_4(e_1) \hat{h}_1,$$

que nous comparons à $[-Y_{0_{\text{marée}}} \hat{h}_1]$:

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega_{0e}}{2n_1 t_{F_0}} f_4(e_1) \hat{h}_1 &= -\frac{9}{t_{V_0}} \left(\frac{R_0}{a_1} \right)^8 \frac{(m_0 + m_1) m_1}{m_0^2} (1 + k_{L_0})^2 \frac{\Omega_{0e}}{2n_1} f_4(e_1) \hat{h}_1 \\ &= -\frac{9k^2 m_0 \Delta t_0 k_{L_0}}{3(1 + k_{L_0})^2 R_0^3} \left(\frac{R_0}{a_1} \right)^8 \frac{(m_0 + m_1) m_1}{m_0^2} (1 + k_{L_0})^2 \frac{\Omega_{0e}}{2n_1} f_4(e_1) \hat{h}_1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{3k^2(m_0 + m_1)\Delta t_0 k_{L_0} R_0^5 m_1 \Omega_0 e}{2a_1^8 m_0 n_1} f_4(e_1) \hat{h}_1,$$

et les deux expressions sont bien équivalentes.

Nous comparons à présent (6.15)_B et (6.17) ($= [-V_0 \hat{e}_1]$). Tout d'abord (6.15)_B :

$$\frac{K_0}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_0 \frac{\omega_0}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) e_1 \hat{e}_1 = \frac{3\Delta t_0 k^2 k_{L_0} m_1 R_0^5 (m_0 + m_1)}{m_0 a_1^8} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \frac{\Omega_0 h}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) e_1 \hat{e}_1,$$

et ensuite, $[-V_0 \cdot \hat{e}_1]$:

$$\begin{aligned} -\frac{9}{t_{F_0}} \left(f_5(e_1) - \frac{11\Omega_0 h}{18n_1} f_4(e_1) \right) \hat{e}_1 &= \frac{9k^2 m_0 \Delta t_0 k_{L_0}}{3(1 + k_{L_0})^2 R_0^3} \left(\frac{R_0}{a_1} \right)^8 \frac{(m_0 + m_1)m_1}{m_0^2} (1 + k_{L_0})^2 \left(\frac{11\Omega_0 h}{2n_1} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right) \hat{e}_1 \\ &= \frac{3\Delta t_0 k^2 k_{L_0} m_1 R_0^5 (m_0 + m_1)}{m_0 a_1^8} \left(\frac{11\Omega_0 h}{2n_1} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right) \hat{e}_1, \end{aligned}$$

et les deux expressions sont bien équivalentes. Notons que c'est en égalant les facteurs de ces deux expressions, $\frac{K_0}{\beta_1 a_1^2}$ et $\frac{9}{t_{F_0}}$, que nous obtenons la relation (6.25). Celle-ci nous sera utile plus tard lorsqu'on voudra générer des systèmes tel que l'ont fait Fabrycky et Tremaine.

Nous comparons les spins : équation (6.12) et équation (6.17) ($= Z_{0_{\text{spin}}} \hat{q}_1 - Y_{0_{\text{spin}}} \hat{h}_1$). Nous utilisons le calcul préalable (6.9). Premièrement, (6.12) :

$$\begin{aligned} (\dot{\hat{e}}_1)_{\text{spin}} &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(\cos \theta_0 \hat{s}_0 \times \vec{e}_1 + \frac{1}{2} (1 - 5 \cos^2 \theta_0) \hat{k}_1 \times \vec{e}_1 \right) \\ &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(\frac{\Omega_0 h}{\omega_0} e_1 \left(\frac{\Omega_0 h}{\omega_0} \hat{q}_1 - \frac{\Omega_0 q}{\omega_0} \hat{h}_1 \right) + \frac{1}{2} (1 - 5 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2}) e_1 \hat{q}_1 \right) \\ &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(e_1 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 q \Omega_0 h}{\omega_0^2} \hat{h}_1 + \frac{1}{2} (1 - 5 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2}) e_1 \hat{q}_1 \right) \\ &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(\frac{e_1}{2} \hat{q}_1 - \frac{3e_1}{2} \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(\frac{e_1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \right) \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{\alpha_{10}}{G_1} \left(\frac{e_1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \right) \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{3k^2 J_{20} R_0^2 (m_0 + m_1)}{2a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)}} \left(\frac{e_1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \right) \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{3k^2 k_{L_0} \omega_0^2 R_0^5 (m_0 + m_1)}{6a_1^{7/2} (1 - e_1^2)^2 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) k^2 m_0}} \left(\frac{e_1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \right) \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{k_{L_0} \omega_0^2 R_0^5 (m_0 + m_1)}{2a_1^{7/2} (1 - e_1^2)^2 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) m_0}} \left(\frac{e_1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_0^2 h}{\omega_0^2} \right) \hat{q}_1 - e_1 \frac{\Omega_0 h \Omega_0 q}{\omega_1^2} \hat{h}_1 \right) \\ &= -\frac{k_{L_0} R_0^5 (m_0 + m_1)}{2a_1^{7/2} (1 - e_1^2)^2 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) m_0}} \left(\frac{e_1}{2} (\omega_0^2 - 3\Omega_0^2 h) \hat{q}_1 - e_1 \Omega_0 h \Omega_0 q \hat{h}_1 \right), \end{aligned} \tag{6.26}$$

et deuxièmement, $\left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{spin}} = Z_{0_{\text{spin}}} \hat{\vec{q}}_1 - Y_{0_{\text{spin}}} \hat{\vec{h}}_1 :$

$$\begin{aligned} Z_{0_{\text{spin}}} \hat{\vec{q}}_1 - Y_{0_{\text{spin}}} \hat{\vec{h}}_1 &= \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{2\Omega_{0h}^2 - \Omega_{0e}^2 - \Omega_{0q}^2}{2(1 - e_1^2)^2} \hat{\vec{q}}_1 + \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{0h} \Omega_{0q}}{(1 - e_1^2)^2} \hat{\vec{h}}_1 \\ &= \frac{k_{L_0} R_0^5 (m_0 + m_1)}{2m_0 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1)} a_1^{7/2} (1 - e_1^2)^2} \left\{ \frac{2\Omega_{0h}^2 - \Omega_{0e}^2 - \Omega_{0q}^2}{2} \hat{\vec{q}}_1 + \Omega_{0h} \Omega_{0q} \hat{\vec{h}}_1 \right\} \\ &= \frac{k_{L_0} R_0^5 (m_0 + m_1)}{2m_0 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1)} a_1^{7/2} (1 - e_1^2)^2} \left\{ \frac{3\Omega_{0h}^2 - \omega_0^2}{2} \hat{\vec{q}}_1 + \Omega_{0h} \Omega_{0q} \hat{\vec{h}}_1 \right\}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

car $\Omega_{0h}^2 + \Omega_{0e}^2 + \Omega_{0q}^2 = \omega_0^2$. Dès lors, (6.26) et (6.27) sont des expressions équivalentes. Jusqu'à présent, nous avons analysé les expressions "spin" et "marée" (équations (6.12), (6.14) et (6.15) dans notre travail et équation (6.17) dans l'autre article). Il nous reste à comparer les équations (6.13) et (6.18), pour la relativité générale, ainsi que (6.11) et (6.16).

En ce qui concerne la relativité, il est évident que $Z_{GR} \hat{\vec{q}}_1$ et $\left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{\text{GR}}$ sont équivalents. Comparons les équations (6.11) et (6.16). Dans notre travail, (6.11) :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{3b} &= -\gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} \left(\cos i \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1 - 2 \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1 - 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{k}}_1 \right) \\ &= -\gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} \left\{ \cos i \left(e_1 \cos i \hat{\vec{q}}_1 - e_1 (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{h}}_1 \right) - 2e_1 \hat{\vec{q}}_1 - 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \left((\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{e}}_1 - (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1) \hat{\vec{q}}_1 \right) \right\} \\ &= \left(\gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} 5e_1 (\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \right) \hat{\vec{e}}_1 + \left(\gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} e_1 \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \right) \hat{\vec{h}}_1 \\ &\quad - \gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} e_1 \left(\cos^2 i - 2 + 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2)^2 \right) \hat{\vec{q}}_1 \\ &= \underbrace{\frac{15k^2 m_2 e_1 (\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) a_1^{3/2}}{4\sqrt{k^2 (m_0 + m_1)} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2} (1 - e_1^2)^{-1/2}}}_{1a.} \hat{\vec{e}}_1 + \underbrace{\frac{3k^2 m_2 \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) e_1 a_1^{3/2}}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2} \sqrt{\mu_1} (1 - e_1^2)^{-1/2}}}_{2a.} \hat{\vec{h}}_1 \\ &\quad + \underbrace{\frac{-3e_1 k^2 m_2 a_1^{3/2}}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2} \sqrt{\mu_1} (1 - e_1^2)^{-1/2}} \left(\cos^2 i - 2 + 5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2)^2 \right)}_{3a.} \hat{\vec{q}}_1. \end{aligned}$$

Dans l'article de Fabrycky et Tremaine [12], ils ont¹⁰ :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{e}}_1\right)_{3b} &= -(1 - e_1^2) 5S_{eq} \hat{\vec{e}}_1 + (1 - e_1^2) (4S_{ee} - S_{qq}) \hat{\vec{q}}_1 + -(1 - e_1^2) S_{qh} \hat{\vec{h}}_1 \\ &= \frac{15a_1^{3/2} m_2 k^2 (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \sqrt{1 - e_1^2}}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2)^{3/2}} \hat{\vec{e}}_1 + \frac{3a_1^{3/2} m_2 k^2 \sqrt{1 - e_1^2} \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1)}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2)^{3/2}} \hat{\vec{h}}_1 \\ &\quad + (1 - e_1^2) \frac{a_1^{3/2} m_2 k^2}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2)^{3/2}} \left(\left\{ 4 - 12(\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1)^2 \right\} - \left\{ 1 - 3(\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1)^2 \right\} \right) \hat{\vec{q}}_1 \end{aligned}$$

10. Nous utilisons les calculs intermédiaires (6.19), (6.20), (6.21) et (6.22).

$$\begin{aligned}
&= \frac{15a_1^{3/2}m_2k^2(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)\sqrt{1-e_1^2}}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{e}_1 + \frac{3a_1^{3/2}m_2k^2\sqrt{1-e_1^2}\cos i(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{h}_1 \\
&\quad + (1-e_1^2)\frac{a_1^{3/2}m_2k^2}{4\sqrt{1-e_1^2}\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\left(3-12(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2+3(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)^2\right)\hat{q}_1 \\
&= \frac{15a_1^{3/2}m_2k^2(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)\sqrt{1-e_1^2}}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{e}_1 + \frac{3a_1^{3/2}m_2k^2\sqrt{1-e_1^2}\cos i(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{h}_1 \\
&\quad + (1-e_1^2)\frac{a_1^{3/2}m_2k^2}{4\sqrt{1-e_1^2}\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\left(3-12(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2+3-3\cos^2 i-3(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2\right)\hat{q}_1 \\
&= \underbrace{\frac{15a_1^{3/2}m_2k^2(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)\sqrt{1-e_1^2}}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{e}_1}_{1b.} + \underbrace{\frac{3a_1^{3/2}m_2k^2\sqrt{1-e_1^2}\cos i(\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\hat{h}_1}_{2b.} \\
&\quad + \underbrace{\frac{3a_1^{3/2}m_2k^2\sqrt{1-e_1^2}}{4\sqrt{\mu_1}a_2^3(1-e_2)^{3/2}}\left(2-5(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)^2-\cos^2 i\right)\hat{q}_1}_{3b.}
\end{aligned}$$

La comparaison des expressions 1a. et 1b., 2a. et 2b., 3a. et 3b. est alors immédiate. Nous sommes donc certain, à ce stade, que l'évolution de \vec{e}_1 est identiquement exprimée dans les deux articles.

6.3.2 Moments angulaires de rotation

Nous comparons maintenant les moments angulaires de rotation. Dans notre travail, les moments angulaires de rotation sont :

$$\dot{\vec{L}}_j = \left(\dot{\vec{L}}_j\right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{L}}_j\right)_{\text{marée}},$$

où

$$\left(\dot{\vec{L}}_j\right)_{\text{spin}} = -\alpha_{1j}\cos\theta_j\hat{k}_1 \times \hat{s}_j - \alpha_{2j}\cos\epsilon_j\hat{k}_2 \times \hat{s}_j, \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\vec{L}}_j\right)_{\text{marée}} &= K_j n_1 \left(f_4(e_1)\sqrt{1-e_1^2}\frac{\omega_j}{2n_1}(\hat{s}_j - \cos\theta_j\hat{k}_1) \right. \\
&\quad \left. - f_1(e_1)\frac{\omega_j}{n_1}\hat{s}_j + f_2(e_1)\hat{k}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j)(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{\frac{9}{2}}}\frac{\omega_j}{n_1}\vec{e}_1 \right). \quad (6.29)
\end{aligned}$$

Dans le deuxième article, la variation est écrite sous la forme

$$C_j\dot{\vec{\Omega}}_j = \left(\dot{\vec{\Omega}}_j\right)_{\text{spin et marée conservative}} + \left(\dot{\vec{\Omega}}_j\right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{\Omega}}_j \right)_{\text{spin et marée conservative}} &= G_1 (-Y_j \hat{e}_1 + X_j \hat{q}_1) \\
 &= G_1 \left\{ \underbrace{\frac{m_1 k_{L_j} R_j^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{j h} \Omega_{j q}}{(1-e_1^2)^2}}_{Y_{j \text{ spin}}} - \underbrace{\frac{\Omega_{j e}}{2n_1 t_{F_j}} f_4(e_1)}_{Y_{j \text{ marée}}} \right\} \hat{e}_1 \\
 &+ G_1 \left\{ \underbrace{-\frac{m_1 k_{L_j} R_j^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{j h} \Omega_{j z}}{(1-e_1^2)^2}}_{X_{j \text{ spin}}} - \underbrace{\frac{\Omega_{j q}}{2n_1 t_{F_j}} \frac{1+9/2e_1^2+5/8e_1^4}{(1-e_1^2)^5}}_{X_{j \text{ marée}}} \right\} \hat{q}_1, \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{\Omega}}_j \right)_{\text{marée dissipative}} &= G_1 W_j \hat{h}_1 \\
 &= G_1 \frac{1}{t_{F_j}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-e_1^2}} f_2(e_1) - \frac{\Omega_{j h}}{n_1} \frac{1}{\sqrt{1-e_1^2}} f_1(e_1) \right\} \hat{h}_1. \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Commençons par comparer les équations exprimant les spins : (6.28) et (6.30)_{spin}. Premièrement¹¹, (6.28) :

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{L}}_0 \right)_{\text{spin}} &= -\alpha_{10} \cos \theta_0 \hat{k}_1 \times \hat{s}_0 - \alpha_{20} \cos \epsilon_0 \hat{k}_2 \times \hat{s}_0 \\
 &= -\alpha_{10} \cos \theta_0 \left[\frac{\Omega_{0e}}{\omega_0} \hat{q}_1 - \frac{\Omega_{0q}}{\omega_0} \hat{e}_1 \right] - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \left[-\cos i \Omega_{0q} + (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{0h} \right] \hat{e}_1 \\
 &\quad - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \left[\cos i \Omega_{0e} - (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{0h} \right] \hat{q}_1 - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \left[(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{0q} - (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{0e} \right] \hat{h}_1 \\
 &= \left[-\alpha_{10} \cos \theta_0 \frac{\Omega_{0e}}{\omega_0} - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \cos i \Omega_{0e} + \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{0h} \right] \hat{q}_1 \\
 &\quad + \left[\alpha_{10} \cos \theta_0 \frac{\Omega_{0q}}{\omega_0} + \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \cos i \Omega_{0q} - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{0h} \right] \hat{e}_1 \\
 &\quad - \frac{\alpha_{20} \cos \epsilon_0}{\omega_0} \left[(\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \Omega_{0q} - (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \Omega_{0e} \right] \hat{h}_1. \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

Maintenant, développons (6.30)_{spin} :

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{\Omega}}_1 \right)_{\text{spin}} &= -G_1 Y_{0 \text{ spin}} \hat{e}_1 + G_1 X_{0 \text{ spin}} \hat{q}_1 \\
 &= \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{0h} \Omega_{0q}}{(1-e_1^2)^2} \hat{e}_1 - \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2\beta_1 n_1 a_1^5} \frac{\Omega_{0h} \Omega_{0z}}{(1-e_1^2)^2} \hat{q}_1 \\
 &= \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5 \sqrt{\mu_1 a_1}}{2n_1 a_1^5 (1-e_1^2)^{3/2}} \left[\Omega_{0h} \Omega_{0q} \hat{e}_1 - \Omega_{0h} \Omega_{0z} \hat{q}_1 \right] \\
 &= \frac{m_1 k_{L_0} R_0^5}{2a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2}} \left[\Omega_{0h} \Omega_{0q} \hat{e}_1 - \Omega_{0h} \Omega_{0z} \hat{q}_1 \right]. \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

11. Nous nous aidons des calculs intermédiaires (6.7) et (6.10).

Nous constatons directement qu'un terme " \hat{h}_1 " est présent dans notre travail et non dans l'équation de Fabrycky et Tremaine [12]. En fait, après comparaison des autres termes de cette équation, nous pouvons conclure que les auteurs considèrent α_{2j} comme nul. Ceci signifie qu'on considère comme négligeable la perturbation du corps m_2 dans l'orbite de m_1 et m_0 . À partir de cette supposition, nous pouvons simplifier (6.32). Nous utilisons la définition de α_{10} ainsi que celle de J_{2i} (6.1).

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{L}}_0\right)_{\text{spin}} &= -\frac{3k^2 m_0 m_1 k_{L_0} \omega_0^2 R_0^5}{6a_1^3 k^2 m_0 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \theta_0 \frac{\Omega_{0e}}{\omega_0} \hat{q}_1 + \frac{3k^2 m_0 m_1 k_{L_0} \omega_0^2 R_0^5}{6a_1^3 k^2 m_0 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \theta_0 \frac{\Omega_{0q}}{\omega_0} \hat{e}_1 \\ &= \frac{m_1 k_{L_0} \omega_0^2 R_0^5}{2a_1^3 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-\frac{\Omega_{0h}}{\omega_0} \frac{\Omega_{0e}}{\omega_0} \hat{q}_1 + \frac{\Omega_{0h}}{\omega_0} \frac{\Omega_{0q}}{\omega_0} \hat{e}_1 \right], \end{aligned} \quad (6.34)$$

et les deux expressions (6.33) et (6.34) sont donc équivalentes.

Il nous reste donc à comparer les marées (équation (6.29) et équations (6.30)_{marée} + (6.31)). Premièrement, (6.29) :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{L}}_j\right)_{\text{marée}} &= K_0 n_1 \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} \frac{\omega_0}{2n_1} (\hat{s}_0 - \cos \theta_0 \hat{k}_1) - f_1(e_1) \frac{\omega_0}{n_1} \hat{s}_0 + f_2(e_1) \hat{k}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_0)(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{\omega_0}{n_1} \vec{e}_1 \right) \\ &= \frac{K_0}{2} \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} - 2f_1(e_1) + \frac{3e_1^2 - (1/2)e_1^4}{(1-e_1^2)^{9/2}} \right) \Omega_{0e} \hat{e}_1 \\ &\quad + \frac{K_0}{2} \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} - 2f_1(e_1) \right) \Omega_{0q} \hat{q}_1 + K_0 (-f_1 \Omega_{0h} + n_1 f_2(e_1)) \hat{h}_1 \\ &= -\frac{K_0}{2} f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} \Omega_{0e} \hat{e}_1 - \frac{K_0}{2} \frac{1+9/2e_1^2+5/8e_1^4}{(1-e_1^2)^{9/2}} \Omega_{0q} \hat{q}_1 + K_0 (-f_1 \Omega_{0h} + n_1 f_2(e_1)) \hat{h}_1, \end{aligned}$$

à comparer avec (6.30)_{marée} + (6.31) :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{\Omega}}_j\right)_{\text{marée conservative}} + \left(\dot{\vec{\Omega}}_j\right)_{\text{marée dissipative}} &= -G_1(Y_0)_{\text{marée}} \hat{e}_1 + G_1(X_0)_{\text{marée}} \hat{q}_1 + G_1 W_0 \hat{h}_1 \\ &= -\frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \Omega_{0e}}{2n_1 t_{F_0}} f_4(e_1) \hat{e}_1 \\ &\quad - \frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \Omega_{0q}}{2n_1 t_{F_0}} \frac{1+9/2e_1^2+5/8e_1^4}{(1-e_1^2)^5} \hat{q}_1 \\ &\quad + \frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}}{t_{F_0}} f_2(e_1) \hat{h}_1 - \frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1} \Omega_{0h}}{t_{F_0} n_1} f_1(e_1) \hat{h}_1, \end{aligned}$$

et les expressions sont bien équivalentes car

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}}{n_1 t_{F_1}} &= \frac{m_0 m_1 3k^2 \sqrt{\mu_1 a_1} \Delta t_0 k_{L_0} (m_0 + m_1) m_1 R_0^5}{(m_0 + m_1) n_1 a_1^8 m_0} \text{ via l'égalité (6.24)} \\ &= \frac{3\Delta t_0 k_{L_0} k^2 m_1^2 R_0^5}{a_1^6} = K_0. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé une seule différence entre les équations de [12] et celles de notre travail : $\alpha_{2j} = 0$.

6.3.3 Moment angulaire orbital

Nous devons encore comparer le moment angulaire orbital de m_1 . Pour rappel, nous avons

$$\dot{\vec{G}}_1 = \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{3b} + \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{spin}} + \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{marée dissipative}},$$

où

$$\left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{3b} = -\gamma(1 - e_1^2) \cos i \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 + 5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \vec{e}_1, \quad (6.35)$$

$$\left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{spin}} = -\alpha_{10} \cos \theta_0 \hat{s}_0 \times \hat{k}_1 - \alpha_{11} \cos \theta_1 \hat{s}_1 \times \hat{k}_1, \quad (6.36)$$

$$\left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{marée dissipative}} = -\left(\dot{\vec{L}}_1\right)_{\text{marée dissipative}} - \left(\dot{\vec{L}}_0\right)_{\text{marée dissipative}}. \quad (6.37)$$

Les auteurs de [12] expriment cette variation du moment angulaire orbital de l'orbite de m_1 par :

$$\frac{1}{G_1} \dot{h}_1 = \left(\dot{h}_1\right)_{\text{spin et marée conservative}} + \left(\dot{h}_1\right)_{\text{marée dissipative}} + \left(\dot{h}_1\right)_{3b},$$

où

$$\left(\dot{h}_1\right)_{\text{spin et marée conservative}} = (Y_0 + Y_1) \hat{e}_1 - (X_0 + X_1) \hat{q}_1 \quad (6.38)$$

$$\left(\dot{h}_1\right)_{\text{marée dissipative}} = -(W_0 + W_1) \hat{h}_1 \quad (6.39)$$

$$\left(\dot{h}_1\right)_{3b} = (1 - e_1^2) S_{qh} \hat{e}_1 - (4e_1^2 + 1) S_{eh} \hat{q}_1 + 5e_1^2 S_{eq} \hat{h}_1. \quad (6.40)$$

où

$$\begin{aligned} S_{qh} &= -\frac{1}{\tau \sqrt{1 - e_1^2}} \left((\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \cos i \right) = \frac{-3a_1^{3/2} m_2 k^2 \cos i (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \\ S_{eh} &= -\frac{1}{\tau \sqrt{1 - e_1^2}} \left((\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) \cos i \right) = \frac{-3a_1^{3/2} m_2 k^2 \cos i (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1)}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \\ S_{eq} &= -\frac{1}{\tau \sqrt{1 - e_1^2}} \left((\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1) \right) = \frac{-3a_1^{3/2} m_2 k^2 (\hat{k}_2 \cdot \hat{e}_1) (\hat{k}_2 \cdot \hat{q}_1)}{4\sqrt{1 - e_1^2} \sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Cette dernière comparaison va être plus rapide, du fait entre autre que pour les équations liées à la marée,

$$\left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{\text{marée}} = -\left(\dot{\vec{L}}_0\right)_{\text{marée}} - \left(\dot{\vec{L}}_1\right)_{\text{marée}},$$

ce que nous avons déjà vérifié. Nous arrivons à la même conclusion en ce qui concerne l'expression liée au spin. Ainsi, les équations (6.36), (6.37), (6.38) et (6.39) sont vérifiées.

Comparons $\left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{3b}$: équations (6.35) et (6.40). Premièrement ¹², (6.35) :

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{G}}_1\right)_{3b} &= -\gamma(1 - e_1^2) \cos i \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{k}}_1 + 5\gamma(\hat{\vec{e}}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{e}}_1 \\
 &= \gamma(1 - e_1^2) \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1) \hat{\vec{q}}_1 - \gamma(1 - e_1^2) \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{e}}_1 + 5\gamma e_1^2 (\hat{\vec{e}}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \cos i \hat{\vec{q}}_1 - 5\gamma e_1^2 (\hat{\vec{e}}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{h}}_1 \\
 &= -\gamma(1 - e_1^2) \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{e}}_1 + \gamma(\hat{\vec{e}}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \cos i (1 + 4e_1^2) \hat{\vec{q}}_1 - 5\gamma e_1^2 (\hat{\vec{e}}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1) \hat{\vec{h}}_1,
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

et (6.40) :

$$\begin{aligned}
 \left(\dot{\vec{h}}_1\right)_{3b} &= (1 - e_1^2) S_{qh} \hat{\vec{e}}_1 - (4e_1^2 + 1) S_{eh} \hat{\vec{q}}_1 + 5e_1^2 S_{eq} \hat{\vec{h}}_1 \\
 &= \frac{-3\sqrt{1 - e_1^2} a_1^{3/2} m_2 k^2 \cos i (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1)}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \hat{\vec{e}}_1 + \frac{3(4e_1^2 + 1) a_1^{3/2} m_2 k^2 (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1) \cos i}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2} \sqrt{1 - e_1^2}} \hat{\vec{q}}_1 \\
 &\quad - \frac{15e_1^2 a_1^{3/2} m_2 k^2 (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{e}}_1) (\hat{\vec{k}}_2 \cdot \hat{\vec{q}}_1)}{4\sqrt{\mu_1} a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2} \sqrt{1 - e_1^2}} \hat{\vec{h}}_1,
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

et on trouve que (6.41) et (6.42) sont équivalentes lorsqu'on remplace γ par

$$\frac{3k^2 m_2 \beta_1 a_1^2}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour conclure, n'oublions pas de multiplier l'équation (6.42) par $\beta_1 \sqrt{G(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)}$ pour comparer exactement la même chose. Et les expressions sont donc bien équivalentes. En guise de conclusion, la seule différence notoire entre notre système d'équation et celui de [12], est α_{2j} , qui est nul dans leur article, alors que nous en tenons compte. Nous désirons obtenir la même figure que les auteurs, nous adoptons dès lors les mêmes équations, et donc nous choisissons dans la suite $\alpha_{2j} = 0$. Le choix de supprimer α_{2j} est raisonnable car son importance peut être négligée. Dans une prochaine section, nous analyserons les ordres de grandeur de chacun des effets présents dans nos équations.

6.4 Résultats de Fabrycky et Tremaine

6.4.1 Génération des systèmes

Dans cette section, nous reproduisons la figure principale de ce chapitre, la figure 5 de l'article de Fabrycky et Tremaine [12]. Pour y parvenir, nous générons 70000 systèmes en utilisant la méthode aléatoire décrite dans leur article. En particulier, nous générons les conditions initiales telles que :

- **Les masses :**
 - $m_0 = m_\odot$,
 - m_1 tel que $\frac{m_1}{m_0} \sim \mathcal{N}(0.23, 0.42)$, où \mathcal{N} est la loi normale,

12. On utilise les calculs préliminaires (6.6) et (6.8).

- m_2 tel que $\frac{m_2}{m_0+m_1} \sim \mathcal{N}(0.23, 0.42)$.
Si nous obtenons m_1 ou m_2 négatif, alors nous générons un nouveau nombre jusqu'à ce que ce dernier soit positif. Remarquons que nous avons utilisé le théorème central limite pour générer les nombres suivants une loi normale.
- **Les périodes orbitales (P_j) et les demi-grands axes (a_j)**
 - $\log_{10}(P_j) \sim \mathcal{N}(4.8, 2.8)$, où P_j est en jours. Par la suite, P_j s'exprimera en années, sauf mention contraire. Nous générons deux périodes, en suivant la même loi. La plus petite valeur est alors P_1 et la plus grande P_2 .
 - Dès lors, $a_1 = ((m_0 + m_1)P_1^2)^{\frac{1}{3}}$ et $a_2 = ((m_0 + m_1 + m_2)P_2^2)^{\frac{1}{3}}$.
- **Les excentricités e_1 et e_2**
 - L'argument du périastre de l'orbite de m_1 est tel que $\omega_{in} \sim U([0, 2\pi])$,
 - Si $P_j < 1000$ jours alors $e_j \sim \text{Rayleigh}(0.33)$,
 - Si $P_j > 1000$ jours alors $e_j \sim \text{Ambartsumian}$.

Pour générer ces deux lois, nous nous basons que la méthode de la transformée inverse. Cette méthode permet d'engendrer des variables aléatoires suivant une loi L à partir d'une distribution uniforme $U([0, 1])$ en calculant la fonction de répartition de L puis en l'inversant.

Dans le cas de la loi de Rayleigh, la fonction de densité est égale à

$$f(e) = \frac{-2\beta}{1 - \exp^{-\beta}} e \exp^{-\beta e^2},$$

où $\beta = \frac{1}{\sqrt{0.33}}$. La fonction de répartition est donc égale

$$F(e) = \frac{1}{\exp^{-\beta} - 1} (\exp^{-\beta e^2} - 1).$$

Une fois inversée, nous obtenons la fonction qui permet d'engendrer des nombres suivants une loi de Rayleigh :

$$e = \sqrt{-\frac{1}{\beta} \log_{10}(1 + u(\exp^{-\beta} - 1))},$$

où $u \sim U([0, 1])$. Remarquons que la fonction de densité de la loi de Rayleigh a été multipliée par un facteur $\frac{-2\beta}{1 - \exp^{-\beta}}$ de façon à ce que l'excentricité soit toujours comprise entre 0 et 1.

La fonction de densité de la loi d'Ambartsumian est

$$f(e) = 2e,$$

la fonction de répartition est dès lors égale à $F(e) = e^2$. Il ne reste plus qu'à inverser cette fonction pour obtenir

$$e = \sqrt{u},$$

où $u \sim U([0, 1])$. Nous obtenons e suivant une loi d'Ambartsumian de cette ma-

nière.

- **Le rayon de m_0 et m_1**

- $R_0 = R_\odot$,
- $R_1 = R_\odot \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{0.8}$.

- **Les paramètres liés à la marée**

- Les nombres de Love de m_0 et m_1 : $k_{L_j} = 0.028$ ($j = 0, 1$),
- Les temps de décalage :

$$\Delta t_j = \frac{3(1 + k_{L_j})^2 R_j^3}{k^2 m_j t_{V_j} k_{L_j}},$$

où $t_{V_j} = 5$ ans. Cette relation a été pour la première fois introduite à l'équation (6.25).

- **Orientation et norme des spins**

- Moments d'inertie : $C_j = 0.08 m_j R_j^2$,
- Période de rotation : $P_{\text{rot},j} = 10$ jours et dès lors, la vitesse de rotation w_j vaut $\frac{2\pi}{10 \cdot 365.25}$.
- Direction des spins déterminée par les angles ψ_j et ϵ_j : $\psi_j = 0$ et $\epsilon_j = 0$.

- **Moments angulaires orbitaux**

- La longitude du noeud ascendant : $\Omega_1 \sim U([0, 2\pi])$.

- **Inclinaison mutuelle**

- $\cos i \sim U([-1, 1])$.

- **Système hiérarchique**

- Nous ne retenons que les systèmes hiérarchiques. Pour déterminer si un système l'est ou pas, nous nous basons sur le critère défini par Mardling et Aarseth [22] :

$$\frac{a_2}{a_1} > 2.8 \left(1 + \frac{m_2}{m_0 + m_1}\right)^{2/5} (1 + e_2)^{2/5} (1 - e_2)^{-6/5} \left(1 - \frac{0.3i}{\pi}\right).$$

Si le critère est respecté, alors le système est hiérarchique.

Il ne reste donc plus qu'à initialiser les 4 vecteurs \vec{L}_0 , \vec{L}_1 , \vec{G}_1 et \vec{e}_1

$$\begin{aligned} \vec{L}_j &= C_j w_j \hat{s}_j, \quad (j = 0, 1), \\ \vec{G}_1 &= G_1 \hat{k}_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)} \hat{k}_1, \\ \vec{e}_1 &= e_1 \hat{e}_1. \end{aligned}$$

avant de pouvoir faire évoluer les systèmes obtenus.

6.4.2 Évolutions des systèmes

Nous désirons produire un histogramme des périodes orbitales initiales et finales du corps m_1 . La durée de vie d'une étoile de masse solaire est approximativement 10^{10} ans, c'est pourquoi nous faisons évoluer les systèmes jusqu'à ce temps. Le pas d'intégration est, au départ, 100 ans. Nous devons simuler les évolutions des 70000 systèmes.

Dans un premier temps, la figure 6.4, évolution de HD80606, est notre figure de référence, que nous avons reproduit en choisissant un pas de 100 ans. Analysons la figure 6.5, qui représente l'évolution de a_1 de notre système de référence, HD80606, pour un pas de 10 ans et un pas de 100 ans. On peut voir que les évolutions coïncident jusque $3.1 \cdot 10^9$ années. Après, elles divergent. Pour pouvoir utiliser un pas de 100 ans, qui accélérerait fortement le temps nécessaire pour les 70000 simulations, il faut donc "couper" la simulation avant qu'elle ne devienne "fausse".

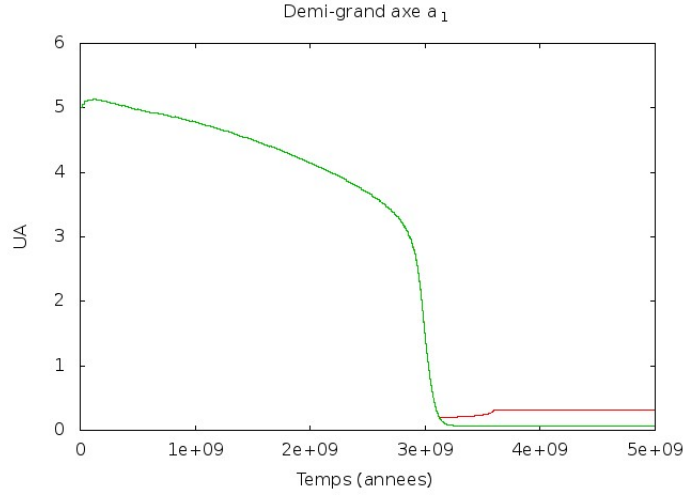


FIGURE 6.5 – Évolutions du demi-grand axe a_1 du système HD80606 étudié précédemment pour deux pas d'intégration différents. En rouge, le pas h est égal à 10 ans alors qu'en vert, il s'agit d'un pas de 100 ans

Revenons donc à notre simulation massive. Nous décidons d'adopter un pas de 100 ans et d'arrêter la simulation de ce système dès que le demi-grand axe a_1 devient inférieur à 0.3 UA , au vu de la comparaison des pas sur notre système de référence. A ce stade, toujours en se basant sur notre figure de référence, le corps est sorti des cycles de Kozai et nous pouvons donc appliquer la formule

$$a_F = a_1(1 - e_1^2)$$

pour estimer le demi-grand axe final (*cf.* section 6.2). La période finale orbitale de m_1 , P_1 , est alors simplement

$$\sqrt{\frac{a_F^3}{m_0 + m_1}}.$$

Ainsi, tous les systèmes qui ont un demi-grand axe initial inférieur à 0.3 UA ne seront pas intégrés. Pour les systèmes où a_1 reste toujours supérieur à 0.3 UA , nous intégrons jusqu'au temps final et la période orbitale finale de m_1 est simplement calculée à partir du demi-grand axe en $t = 10^{10}$ années. C'est un gain de temps non négligeable.

La première figure (figure 6.6) a été réalisée avec un pas de 100 ans. Cette figure est donc construite à partir des équations sans α_{2j} et avec notre critère d'arrêt. Nous avons simulé 40000 systèmes (essai 1). L'histogramme des périodes orbitales initiales (figure 6.6-haut) représente les périodes orbitales des 40000 compagnons planétaires. Ces périodes sont générées en suivant la loi lognormale décrite au début de cette section :

$$\log_{10}(P_1) \sim \mathcal{N}(4.8, 2.8).$$

Cependant, la moyenne de $\log_{10}(P_1)$ ne se trouve pas à 4.8, comme on pourrait à première vue penser. En effet, les deux périodes orbitales sont générées en même temps et en suivant la même loi sans décider quelle sera la période liée à m_1 et laquelle sera liée à m_2 . La plus petite des deux périodes générées est alors attribuée à la masse m_1 (P_1). Dès lors, le "pic" de périodes est décalé vers la gauche par rapport à la moyenne initiale, 4.8. Le pic se situerait en 4.8 si une seule période était générée. L'histogramme des périodes orbitales finales (figure 6.6-bas) est obtenue en approximativement un jour et demi, lorsque nous pouvons la réaliser avec 12 processeurs. Sur un "simple" ordinateur, l'exécution du code est donc beaucoup plus lente.

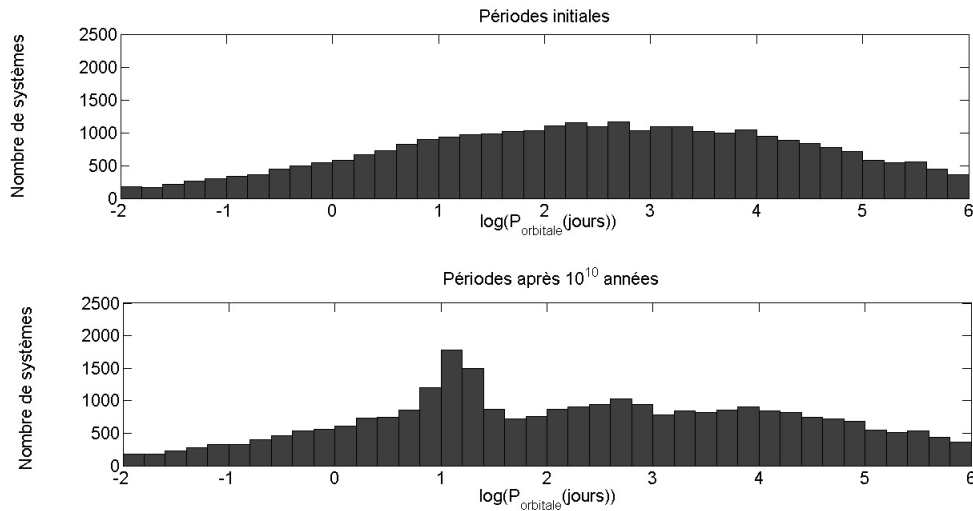


FIGURE 6.6 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 40000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 100 ans. Le critère d'arrêt est appliqué. Essai 1

Nos résultats ne coïncident pas avec ceux de Fabrycky et son collègue (*cf.* figure 6.1 gauche). En effet, nous observons une accumulation dans les périodes finales de m_1 , comme eux, mais celle-ci se situe à environ 10-20 jours. Nous décidons d'analyser les évolutions

de tous les systèmes, un par un. Plusieurs catégories de systèmes apparaissent :

- Tous les systèmes pour lesquels l'excentricité oscille encore au temps final. Ces systèmes sont ceux qui sont toujours dans les cycles de Kozai lorsqu'on arrête l'intégration. Les demi-grands axes varient très peu et peuvent être considérés comme constants jusqu'à la fin. Ce sont typiquement les systèmes qui ont une séparation orbitale très importante (fortement hiérarchiques) et des masses comparables. Cette situation est représentée à la figure 6.7 (Cas A, gauche). Ces systèmes sont peu intéressants dans notre étude car généralement, le demi-grand axe variant très peu, la période orbitale finale est donc proche de la période orbitale initiale. Certains possèdent même une période de cycle de Kozai tellement longue qu'ils n'ont pas le temps de finir une seule période avant la fin de l'intégration (figure 6.7 (Cas B, droite)).

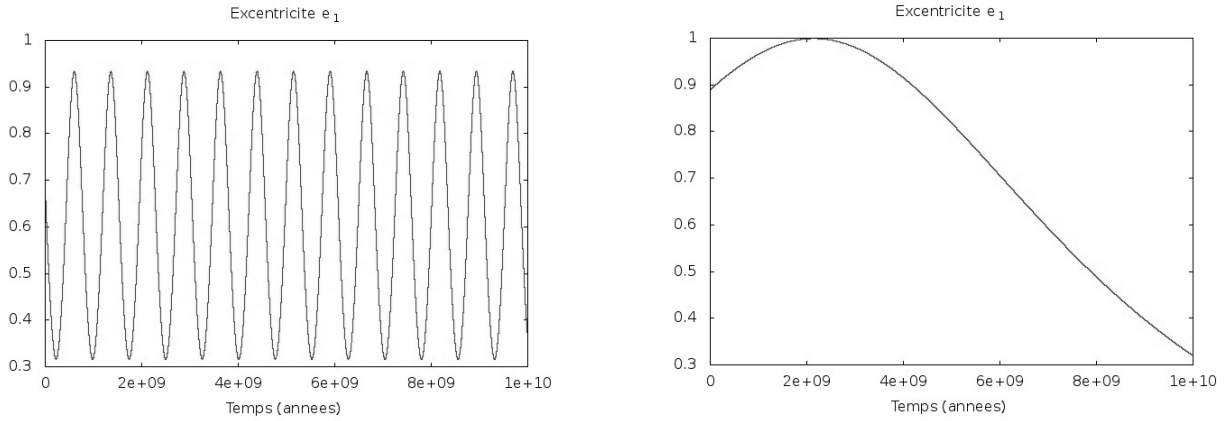


FIGURE 6.7 – Cycles de Kozai : évolutions des excentricités e_1 de deux systèmes avec des périodes d'oscillations de Kozai très grandes. Cas A : le corps m_1 est toujours dans les cycles de Kozai à la fin de l'intégration. Cas B : la période du cycle de Kozai est plus grande que le temps d'intégration

- Systèmes similaires à notre système de référence HD80606. Pour ces derniers, la dissipation et la combinaison forte inclinaison/forte excentricité permettent des cycles de Kozai et une circularisation de l'orbite avant le temps final. Un tel système est représenté à la figure 6.8. Une fois le demi-grand axe inférieur à 0.3 UA , on arrête l'intégration. Un "arrêt valide" est un arrêt fait après que l'excentricité soit sortie des cycles de Kozai. Si l'excentricité oscille encore, alors l'approximation de a_F sera fausse.

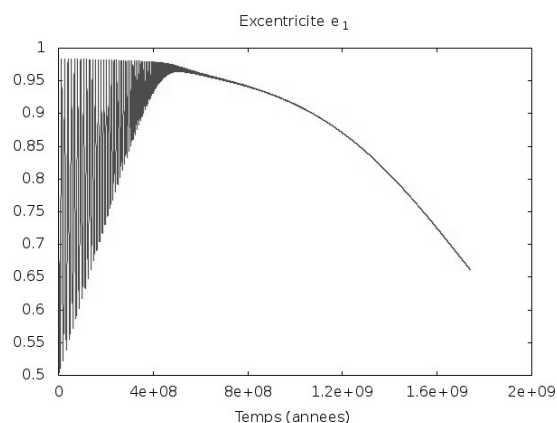


FIGURE 6.8 – Évolution de l'excentricité e_1 dans le cas où les cycles de Kozai sont terminés avant que l'intégration ne soit arrêtée par le critère d'arrêt

- Certains systèmes (figure 6.9) sont mal intégrés, en raison d'un pas d'intégration trop grand. Ils posent problème numériquement. Ce sont typiquement les systèmes où le corps intérieur passe rapidement très près de l'étoile (a_1 initial faible ou e_1 initial très élevé). Pour ceux-là, on doit diminuer le pas, car on peut constater que le demi-grand axe décroît trop vite. Un pas plus petit devrait pouvoir suivre cette fulgurante diminution de a_1 . Les deux exemples de la figure 6.9 résulte du même problème, la trop rapide décroissance de a_1 .

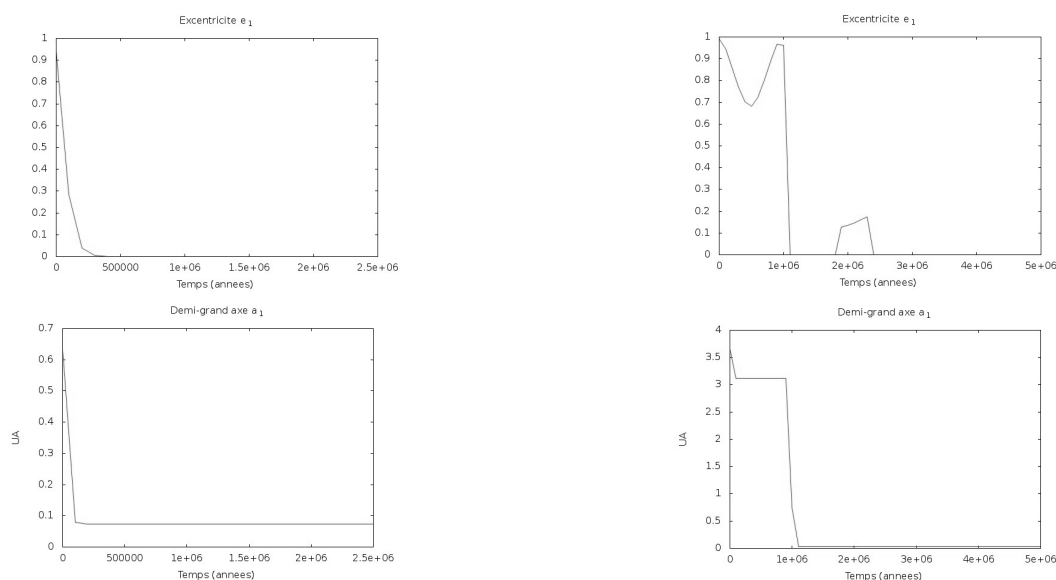


FIGURE 6.9 – Évolutions de l'excentricité e_1 (haut) et du demi-grand axe a_1 (bas) pour deux systèmes où le pas d'intégration n'est pas adapté. Gauche : système 1, intégration jusqu'à $2.5 \cdot 10^6$ années. Droite : système 2, intégration jusqu'à $5 \cdot 10^6$ années

Ces figures vont nous servir de base pour la suite. L'erreur dans l'histogramme vient soit du pas de l'intégration, soit de la génération des systèmes. En effet, grâce à la reproduction de la figure 6.4 et la comparaison avec Fabrycky et Tremaine [12], nous avons la certitude que nos équations sont correctes.

Nous baissions le pas, et prenons maintenant un pas de 10 ans. Nous obtenons une figure qui est plus proche du résultat souhaité, la figure 6.10 (essai 2). Mais, avec ce pas plus petit, le temps d'exécution de notre programme devient grand, et nous devons limiter le nombre de systèmes. Pour cette figure, nous avons généré 900 systèmes. Cette contrainte de temps va être permanente jusqu'à la fin de notre travail.

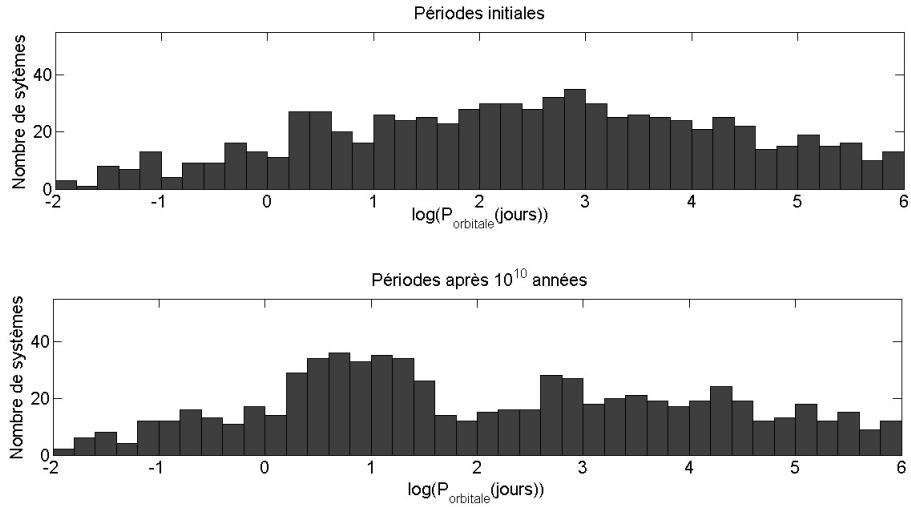


FIGURE 6.10 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 900 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 10 ans. Le critère d'arrêt est appliqué. Essai 2

Toute la problématique réside dans le fait qu'un pas grand n'est pas valable pour tous les systèmes et le fait qu'un pas petit pour tous les systèmes nous ralentirait trop et aucune figure ne serait réalisée avant la fin du stage. Il faut donc décider quand un pas petit est nécessaire et quand on peut utiliser un pas plus grand¹³. Nous réalisons encore 7 essais différents, que nous développons ci-dessous plus ou moins selon l'intérêt du résultat. Pour toutes les figures qui suivent, l'histogramme des périodes initiales est le même (figure 6.11), de façon à bien observer les différences d'une figure à l'autre. Toutes les prochaines figures sont générées avec 1000 systèmes.

13. Il est à noter que Fabrycky et Tremaine [12] ne disent rien à propos de l'intégrateur et du pas d'intégration qu'ils utilisent. Ils développent néanmoins quelques critères d'optimisation pour accélérer le temps d'exécution de leur programme. L'un d'entre eux, que nous avons tenté d'implémenter sans succès, est de calculer l'évolution de e_1 jusqu'à son premier maximum. Une fois celui-ci déterminé, ils prédisent le temps que prendra la planète pour migrer près de son étoile. Si ce temps est supérieur au temps final d'intégration, les auteurs ne continuent pas de faire évoluer ce système.

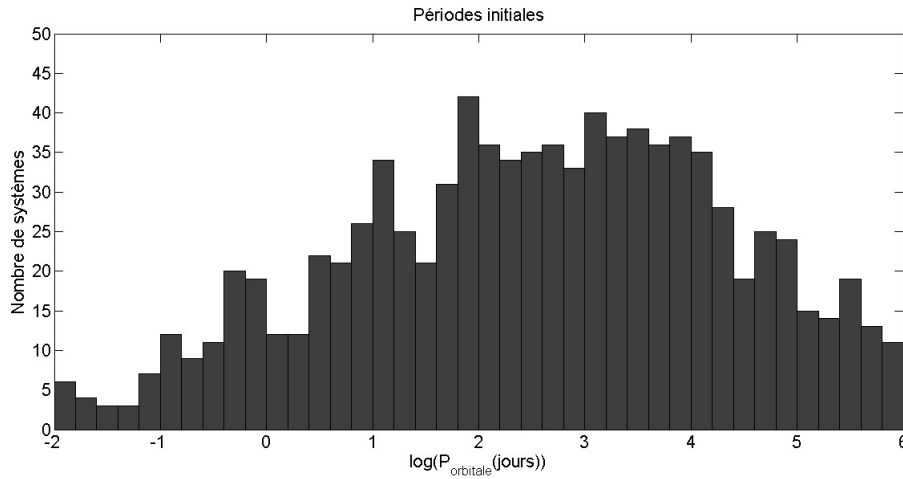


FIGURE 6.11 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales pour 1000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années

Essai 3 : Un des problèmes que nous avons est que parfois, la chute de a_1 d'une grande valeur à une plus petite était trop rapide pour que le pas de 10 ans puisse être utilisé. Nous décidons donc de créer un second critère, défini comme suit. Si la diminution du demi-grand axe est trop rapide, c'est-à-dire, si le demi-grand axe passe d'une valeur supérieure à 0.3 UA à une valeur qui en est inférieure en moins de 10^6 années, alors on recommence l'intégration de ce système depuis le début, avec un pas de 1 an. Nous nommons ce critère "critère de rapidité (10^6 années)". Nous obtenons la figure 6.12 où nous appliquons ce critère ainsi que le critère d'arrêt. Dès lors, tout système pour lequel a_1 devient inférieur à 0.3 UA après 10^6 années sera stoppé et calculé avec la formule de a_F .

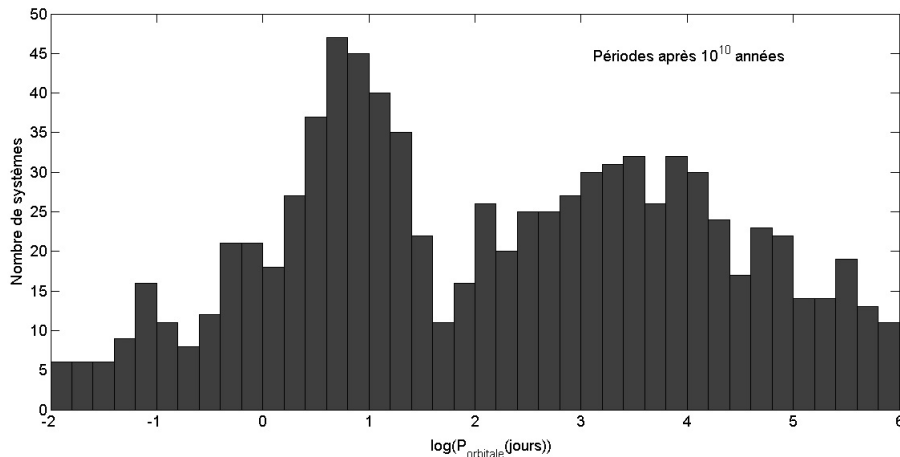


FIGURE 6.12 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 1000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 10 ans. Le critère d'arrêt et le critère de rapidité (10^6 années) sont appliqués. Essai 3

Les résultats sont à nouveau meilleurs.

Essai 4 : Nous décidons de reproduire l'essai précédent mais avec un pas initial de 100 ans, qui permettrait d'avoir une bonne figure en dix fois moins de temps. Nous obtenons la figure 6.13. Celle-ci semble être notre meilleur essai. En effet, il est le plus proche du résultat souhaité, et en même temps, c'est la plus rapide de toutes nos simulations.

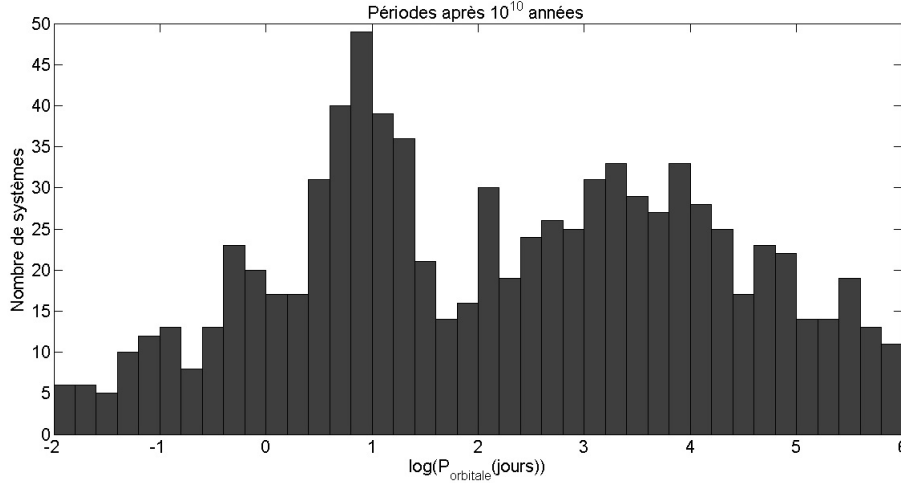


FIGURE 6.13 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 1000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 100 ans. Le critère d'arrêt et le critère de rapidité (10^6 années) sont appliqués. Essai 4

Nous essayons également de changer le "critère de rapidité". Pour les deux essais suivants, nous vérifions si la valeur de a_1 passe d'une valeur supérieure à 0.3 UA à une valeur inférieure en moins de 10^7 années. Si c'est le cas, nous recommençons l'intégration pour ce système avec un pas égal à 1 an et à 0.1 an. Ces figures n'apportent pas de meilleurs résultats, nous ne les montrons donc pas ici.

Essai 5 : Repartons de l'essai 4 (figure 6.13). Nous décidons de regarder les évolutions une par une, pour constater l'amélioration. Les simulations qui posaient problème à cause d'un pas trop grand ne posent plus problème, et la "décroissance rapide" de a_1 est maintenant résolue. Cependant, nous constatons que certaines évolutions sont stoppées trop tôt. Depuis le début, nous avons choisi un critère d'arrêt pour tous les demi-grands axes sous 0.3 UA . Ce critère est en réalité à revoir. Avec ce dernier, l'intégration est parfois interrompue alors que l'excentricité oscille encore et que la masse m_1 est encore dans les cycles de Kozai. On peut le constater à la figure 6.14. Nous décidons donc de continuer l'intégration des systèmes normalement stoppés, avec un pas d'intégration de 10 ans. Ce critère semble meilleur, car si nous regardons à nouveau la figure de référence, le pas de 100 ans n'était plus valable après les cycles de Kozai. Le pas de 10 ans reproduisait bien la figure. Commencer avec un pas d'intégration de 100 et continuer avec un pas de 10 ans dès que a_1 est trop petit semble une bonne solution. Nous obtenons la figure 6.15.

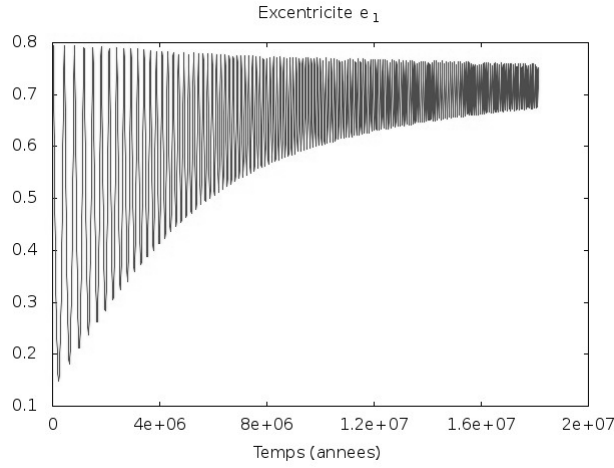


FIGURE 6.14 – Évolution de l'excentricité d'un système dans les conditions de l'essai 4, pour lequel le critère d'arrêt ($a_1 < 0.3 \text{ UA}$) n'est pas valable, car l'excentricité est encore dans les cycles de Kozai

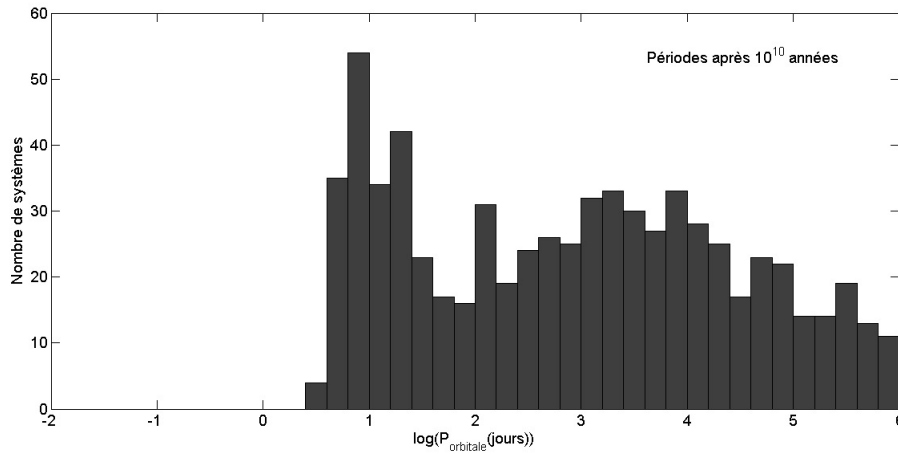


FIGURE 6.15 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 1000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 100 ans. Le critère de rapidité (10^6 années-pas : 1 an) est appliqué. Tout système pour lequel a_1 devient inférieur à 0.3 UA est continué avec un pas de 10 ans. Essai 5

La figure 6.15 a visiblement un nouveau problème : les trop petites valeurs de a_1 ne sont "pas prises en compte". En effet, l'évolution du système ne se calcule pas correctement, et dès la deuxième itération, on obtient des "NaN" ¹⁴. Nous constatons que les évolutions qui se soldent par un "NaN" sont celles pour qui a_2 est de l'ordre de 1 UA ou celles pour lesquelles a_1 est très petit, inférieur à 0.1 UA . L'essai 4 (figure 6.13) reste donc notre meilleur essai jusqu'ici, malgré que le critère d'arrêt ne soit pas complètement parfait.

14. NaN est obtenu quand le résultat est une indétermination mathématique, telle que $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, ...

Essai 6 : Notre dernière tentative tente de parer à tous les problèmes que nous avons pu identifier jusqu'à présent. Avec un pas trop grand, les simulations pour qui $a_1 < 0.5 \text{ UA}$ n'évoluent pas correctement. Nous appliquons donc plusieurs critères que nous pouvons synthétiser comme suit :

- Si les conditions initiales respectent " $a_1 < 0.1 \text{ UA}$ et $a_2 < 1.5 \text{ UA}$ ", alors on calcule le demi-grand axe final a_F via la formule $a_1(1 - e_1^2)$ sans intégrer.
- Sinon, on intègre avec un pas d'intégration de 100 ans. Nous devons alors distinguer :
 - Si a_1 devient inférieur à 0.5 UA en moins de 10^6 années, alors on recommence l'intégration depuis $t = 0$ avec un pas d'intégration égal à 1 an,
 - Sinon, on continue l'intégration et dès que $a_1 < 0.5 \text{ UA}$, on continue l'intégration avec un pas de 1 an.
- Dans tous les cas, dès que la condition " $a_1 < 0.1 \text{ UA}$ et $a_2 < 1.5 \text{ UA}$ " est respectée, l'intégration est stoppée et on calcule a_F .

Nous obtenons la figure 6.16.

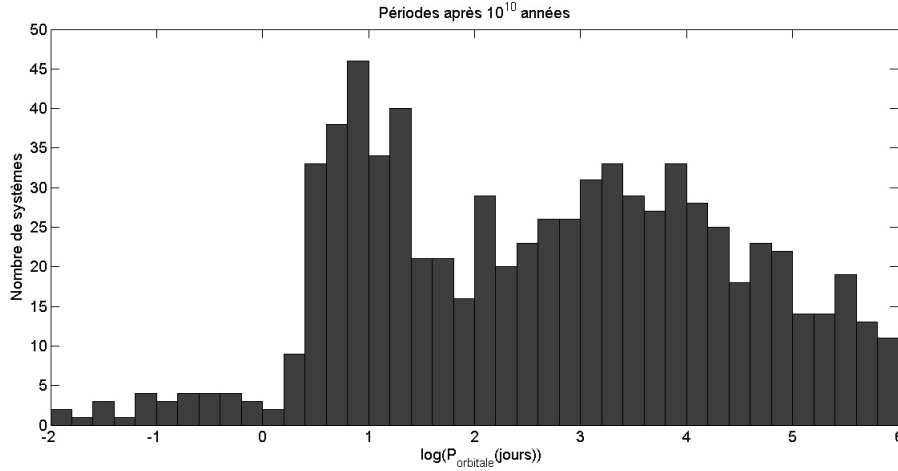


FIGURE 6.16 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 1000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 100 ans au départ. Voir texte pour les critères appliqués. Essai 6

On peut constater une amélioration par rapport à l'essai précédent (figure 6.15), car plus de "petites valeurs" des demi-grands axes ont été bien calculées. Cependant, on peut voir qu'il en reste beaucoup pour lesquelles ce n'est pas encore le cas. Le temps d'exécution de cette simulation a été plus grande que les précédentes, au vu de toutes les précautions et critères que nous avons appliqués. Nous avons également produit une figure similaire à celle-ci, à la différence que dès que $a_1 < 0.5 \text{ UA}$, le pas d'intégration passe de 100 ans à 10 ans (au lieu de 1 an). Cette simulation était plus rapide, mais nous ne gagnions pas en précision.

En conclusion, nous choisissons d'adopter les conditions de l'essai 4 pour créer notre figure finale. L'intégration de 70000 systèmes permet d'obtenir la figure 6.17. Sans être parfaite, cette figure sera notre référence pour la section suivante. On peut constater de nombreuses différences entre ces histogrammes et ceux proposés par Fabrycky et Tremaine [12]. En effet, même si la distribution initiale est fort semblable à celle des auteurs,

notre histogramme de périodes initiales est plus "aplati". Sur l'histogramme de Fabrycky et Tremaine, plus de périodes se situent autour de la moyenne et beaucoup moins aux valeurs extrêmes. Dans leur histogramme, le nombre de périodes se situant autour de la moyenne dépasse 1500, alors que nous nous situons en deçà.

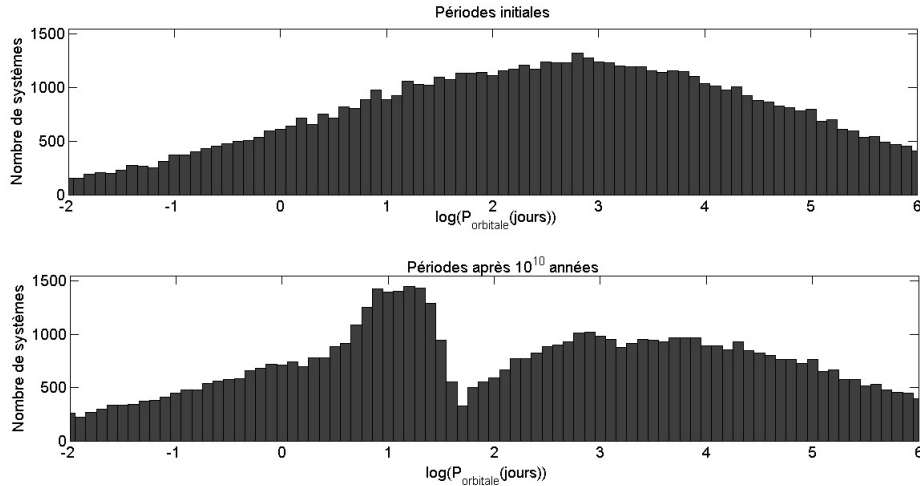


FIGURE 6.17 – Histogramme des périodes orbitales P_1 initiales et finales pour 70000 systèmes dont on regarde l'évolution pendant 10^{10} années. Le pas d'intégration est 100 ans. Le critère d'arrêt et le critère de rapidité (10^6 années) sont appliqués.

En ce qui concerne les histogrammes des périodes finales, malgré qu'on puisse aussi observer une accumulation dans notre histogramme, les différences avec l'histogramme de Fabrycky et Tremaine [12] sont claires. Tout d'abord, l'accumulation est plus importante sur notre histogramme. Alors que 1200 systèmes se situent au pic dans leur histogramme, près de 1400 systèmes aboutissent à la même période finale dans notre histogramme. Aussi, nous pouvons clairement remarquer que beaucoup moins de systèmes ont une période finale supérieure à 100 jours dans notre graphe que dans celui des auteurs. Enfin, la troisième différence est l'important "creux" autour de 50 jours qu'on peut constater dans notre distribution. L'histogramme de Fabrycky et Tremaine [12] possède lui aussi un creux, mais beaucoup moins prononcé et se situant à un peu plus de 10 jours. Nous pouvons aussi remarquer que plus de systèmes ont des petites périodes, de l'ordre de 0.01 jours. Nous en comptons plus 225 avec une période de 0.01 jours, alors que dans l'histogramme de Fabrycky et Tremaine [12], à peine 50 systèmes possèdent une telle valeur finale.

Effets du paramètre de marée sur les cycles de Kozai

En même temps que les autres tests, nous avons voulu comprendre l'effet du paramètre de marée, Δt_1 , dans nos résultats. Nous changeons maintenant la valeur de ce paramètre dans nos simulations.

En prenant Δt petit, nous diminuons l'effet des marées et la sortie des cycles de Kozai

est plus lente. En effet, les effets de marée étant moins importants, la dissipation est moins forte et le phénomène observé à la figure 6.4 survient plus tard. Rappelons que la dissipation est directement proportionnelle¹⁵ au Δt choisi. Si au contraire, nous choisissons un Δt dix fois supérieur à la valeur initiale, alors la marée sera plus forte et la dissipation aussi. Dès lors, les cycles de Kozai durent moins longtemps. Si la sortie des cycles de Kozai se faisait avant 10^{10} années avec $\Delta t_{\text{initial}}$, alors il se peut que maintenant, la masse soit encore dans les cycles de Kozai après 10^{10} ans, si on choisit un Δt plus petit. Que le système sorte des cycles de Kozai rapidement ou non, la période orbitale finale ne change pas. Seul le temps pour y arriver est modifié. Pour illustrer nos propos, nous décidons de tracer l'évolution du système de référence en modifiant ce paramètre de marée : $\Delta t = 0.1 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$, $\Delta t = 10 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$, $\Delta t = 100 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$ et $\Delta t = 1000 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$. Le résultat est reproduit à la figure 6.18. Il est alors évident que l'évolution est la même, uniquement l'échelle de temps varie.

Sur le premier graphe (6.18, haut gauche), on peut voir que les effets de marée sont tellement faibles que le corps est encore dans les cycles de Kozai à la fin de l'intégration. Pour ce système, la migration n'a pas lieu dans les temps. Pour les trois autres graphes de cette figure, le Δt est de plus en plus grand, passant de dix fois supérieur à la valeur initiale (haut-droite), à mille fois supérieur à la valeur initiale (bas droite). Plus le paramètre de marée croît, plus le phénomène de cycles de Kozai avec *tidal friction* se produit vite. Pour $\Delta t = 100 \Delta t_{\text{initial}}$ (bas gauche) et $\Delta t = 1000 \Delta t_{\text{initial}}$, le phénomène est si rapide qu'un pas d'intégration de 10 ans n'est pas adapté. Un zoom de ces deux graphes est aussi montré. Modifier le paramètre de marée permet ainsi d'accélérer ou de ralentir la dynamique du système, mais ne modifie pas les valeurs finales des demi-grands axes.

15. Voir la définition de K_j , égalité (6.5), qui apparaît dans les termes de marées dissipatives.

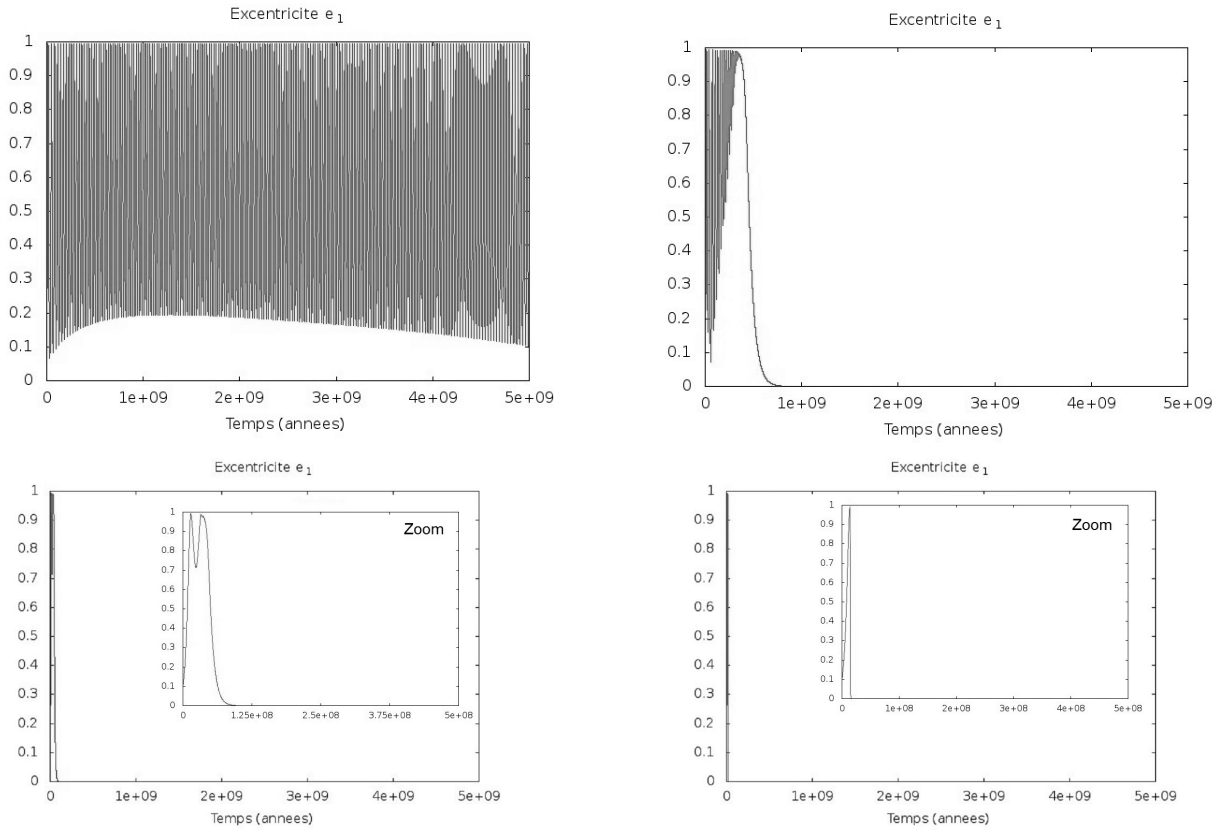


FIGURE 6.18 – Évolutions de l'excentricité e_1 pour 4 systèmes. Le pas d'intégration est égal à 10 ans. Intégration jusqu'à 10^5 années. Haut, gauche : système HD80606b avec $\Delta t = 0.1 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$. Haut, droite : système HD80606b avec $\Delta t = 10 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$. Bas, gauche : système HD80606b avec $\Delta t = 100 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$. La figure insérée est un zoom, jusqu'au temps $5 \cdot 10^8$ années. Bas, droite : système HD80606b avec $\Delta t = 1000 \cdot \Delta t_{\text{initial}}$. La figure insérée est un zoom, jusqu'au temps $5 \cdot 10^8$ années

Tous ces tests laissent penser que le problème vient d'un mauvais choix d'intégrateur et de l'accumulation d'erreurs. Par facilité, nous avons gardé le même intégrateur que pour les premiers chapitres de ce travail, c'est-à-dire l'intégrateur Runge Kutta 4, l'objectif n'étant pas de reproduire fidèlement les résultats de Fabrycky et Tremaine [12] mais seulement de retrouver une même allure générale. Cependant, ce choix n'était pas correct, et nous aurions dû lui préférer un intégrateur symplectique, qui borne l'erreur, ou un intégrateur à pas variable, qui aurait été mieux adapté à notre problème, ou même une combinaison d'un intégrateur symplectique et d'un intégrateur à pas variable. Grâce à ces classes d'intégrateurs, nous aurions limité l'erreur tout en pouvant choisir un pas d'intégration plus grand. Il faudrait alors reproduire les résultats de Fabrycky et Tremaine [12] pour déterminer si nous obtenons le pic suite à ce changement.

6.5 Migration des planètes : compréhension du pic

Bien que l'histogramme de la figure 6.17 n'est pas la reproduction fidèle des résultats de Fabrycky et Tremaine [12], il présente toutefois la même accumulation autour d'une période orbitale finale. Cet histogramme va nous servir de référence dans la suite de ce travail. Nous souhaitons comprendre quels sont les effets qui induisent la migration ainsi que comprendre l'origine de l'accumulation. Nous allons procéder par étapes. Tout d'abord, nous analysons de nouveau les équations de façon à identifier le rôle de chaque terme. Ensuite, nous simplifierons les équations en supprimant les termes ne jouant pas de rôle dans la migration de la planète. Après cela, nous pourrons nous consacrer aux termes essentiels. Commençons par analyser les équations. Pour plus de clarté, reprenons-les brièvement :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{G}}_1 &= \underbrace{-\gamma(1-e_1^2)\cos i \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{k}}_1}_A + \underbrace{5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \vec{e}_1}_B - \underbrace{\sum_j \alpha_{1j} \cos \theta_j \hat{\vec{s}}_j \times \hat{\vec{k}}_1}_C \\
&\quad - \underbrace{\sum_j K_j n_1 \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} \frac{\omega_j}{2n_1} (\hat{\vec{s}}_j - \cos \theta_j \hat{\vec{k}}_1) - f_1(e_1) \frac{\omega_j}{n_1} \hat{\vec{s}}_j + f_2(e_1) \hat{\vec{k}}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_j)(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{\omega_j}{n_1} \vec{e}_1 \right)}_{M(\text{marées dissipatives})} \\
\dot{\vec{e}}_1 &= -\gamma \frac{(1-e_1^2)}{G_1} \left(\underbrace{\cos i \hat{\vec{k}}_2 \times \vec{e}_1}_D - \underbrace{2 \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1}_E - \underbrace{5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{k}}_1}_F \right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^1 \frac{\alpha_{1j}}{G_1} \left(\underbrace{\cos \theta_j \hat{\vec{s}}_j \times \vec{e}_1}_G + \underbrace{\frac{1}{2}(1-5\cos^2 \theta_j) \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1}_H \right) \\
&\quad + \underbrace{\frac{3\mu_1 n_1}{c^2 a_1 (1-e_1^2)} \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1}_{I(\text{GR})} + \underbrace{\sum_{j=0}^1 \frac{15}{2} k_{L_j} n_1 \frac{m_{(1-j)}}{m_j} \left(\frac{R_j}{a_1} \right)^5 f_4(e_1) \hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1}_{J(\text{marées conservatives})} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{j=0}^1 \frac{K_j}{\beta_1 a_1^2} \left\{ f_4(e_1) \frac{\omega_j}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_j) \hat{\vec{k}}_1 - \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_j \frac{\omega_j}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) \vec{e}_1 \right\}}_{K=\sum_j K(j)(\text{marées dissipatives})} \\
\dot{\vec{L}}_j &= \underbrace{-\alpha_{1j} \cos \theta_j \hat{\vec{k}}_1 \times \hat{\vec{s}}_j}_L \\
&\quad + \underbrace{K_j n_1 \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} \frac{\omega_j}{2n_1} (\hat{\vec{s}}_j - \cos \theta_j \hat{\vec{k}}_1) - f_1(e_1) \frac{\omega_j}{n_1} \hat{\vec{s}}_j + f_2(e_1) \hat{\vec{k}}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_j)(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{\omega_j}{n_1} \vec{e}_1 \right)}_{M(\text{marées dissipatives})}
\end{aligned}$$

Dans l'équation $\dot{\vec{G}}_1$, les termes A et C sont des termes de précession. En effet, d'après la définition du produit vectoriel, tous les produits vectoriels tels que

$$\dot{\vec{k}}_1 = \vec{\bullet} \times \vec{k}_1,$$

impliqueront une précession de \vec{k}_1 . Par exemple, le terme $A, \hat{k}_2 \times \hat{k}_1$, implique une précession de \hat{k}_1 autour de \hat{k}_2 . Le terme C , lui, représente aussi une précession de \hat{k}_1 autour du moment angulaire de rotation. La précession modifie la direction d'un vecteur, mais non sa norme. Le terme B ne représente pas de précession. Le terme de marées dissipatives M n'est pas non plus une précession.

Dans l'équation de \vec{e}_1 , les termes impliquant une précession sont D, E, G, H, I , et J . Les termes F et K ne sont pas des termes de précession. Pour rappel, K est le terme de marées dissipatives. F est un terme lié aux effets de Kozai. Il est responsable des échanges entre les fortes valeurs de l'excentricité et de l'inclinaison mutuelle. Il est lié au terme B de l'équation de \vec{G}_1 , lui aussi responsable de cet échange entre les deux variables. Le terme I , lié à la relativité représente aussi une précession de \vec{e}_1 autour du moment angulaire orbital \vec{G}_1 .

Il en est de même pour \vec{L}_j , où il y a une précession du spin de m_j (terme L) autour du moment angulaire orbital. Le terme M , terme lié aux marées dissipatives, n'implique pas une précession de \vec{L}_j .

De façon à simplifier le problème, nous essayons d'éliminer tous les termes qui ne sont pas nécessaires à la formation du pic. Nous effectuons plusieurs simulations où nous retirons un ou plusieurs termes des équations. Si, sans ce(s) terme(s), l'histogramme possède toujours un pic, alors c'est que ceux-ci ne sont pas responsables de la migration et on peut donc les laisser de côté. Nous effectuons 15 simulations différentes. Celles-ci sont synthétisées à la table 6.3. Toutes les simulations sont basées sur la figure 6.13, qui constituait notre meilleur histogramme dans la section précédente. Nous générons 1000 nouveaux systèmes et utilisons ces mêmes systèmes pour l'ensemble des essais. La figure 6.19 représente les histogrammes des périodes initiales et finales dans le cas où aucun changement dans les équations n'est opéré.

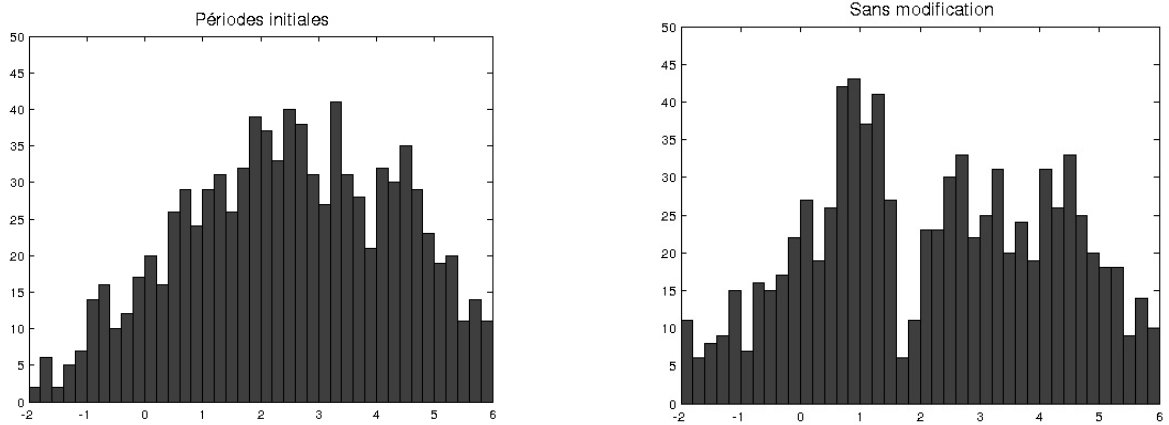


FIGURE 6.19 – Distribution des périodes orbitales initiales (gauche) et finales (droite) dans le cas où aucune modification des équations n'est faite

Les essais vont d'une petite simplification (comme c'est le cas pour les essais 1, 2, 5) jusqu'à une simplification plus importante (13, 14, 15). La majorité des essais n'influence pas la migration et nous pouvons considérer que les histogrammes engendrés sont équivalents à l'histogramme obtenu avec les équations complètes. Seul l'essai 6 a de l'influence. Cet essai est tel que $\gamma = 0$, ce qui implique que les termes liés à l'effet de Kozai, B et F , deviennent nuls. Dès lors, aucun échange n'a lieu entre les valeurs de l'excentricité et de l'inclinaison mutuelle, et cela revient à considérer que les trois corps n'interagissent pas entre eux. Tous les essais, excepté l'essai 6, jouent uniquement sur le taux de précession.

Essais	Modification des équations
Essai 1	$\alpha_{11} = 0$
Essai 2	$\alpha_{10} = 0$
Essai 3	$\alpha_{10} = 0$ et $\alpha_{11} = 0$
Essai 4	Ne pas considérer le terme H dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 5	Ne pas considérer le terme G dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 6	$\gamma = 0$
Essai 7	Ne pas considérer les termes H et G dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 8	Ne pas considérer les termes D et E dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 9	Uniquement considérer le terme F dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$, c'est-à-dire supprimer les termes D , E , G et H
Essai 10	Uniquement considérer le terme F dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$, c'est-à-dire supprimer les termes D , E , G et H . Ne pas considérer le terme C dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$
Essai 11	Uniquement considérer le terme F dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$, c'est-à-dire supprimer les termes D , E , G et H . Uniquement considérer les termes B et M dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$, c'est-à-dire supprimer les termes A et C
Essai 12	Uniquement considérer les termes F , I , K dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$ et les termes A , B et M dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$. Supprimer également la partie conservative des équations de marées de $\dot{\vec{e}}_1$ (terme J)
Essai 13	Uniquement considérer les termes F , J , K dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$ et les termes A et B dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$. Supprimer également la correction relativiste (terme I)
Essai 14	Combinaison des essais 15 et 13. Uniquement considérer les termes F et K dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$ et les termes A , B et M dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$. Supprimer la correction relativiste (terme I) et la partie conservative des équations de marée (terme J) dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 15	Uniquement considérer les termes F et K dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$ et les termes B et M dans l'équation de $\dot{\vec{G}}_1$. Supprimer la correction relativiste (terme I) et la partie conservative des équations de marée (terme J) dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$ et supprimer A , B et C dans \vec{L}_j

TABLE 6.3 – Description des essais où au moins un terme change par rapport aux équations complètes. Les différents histogrammes correspondants sont repris à la figure 6.20

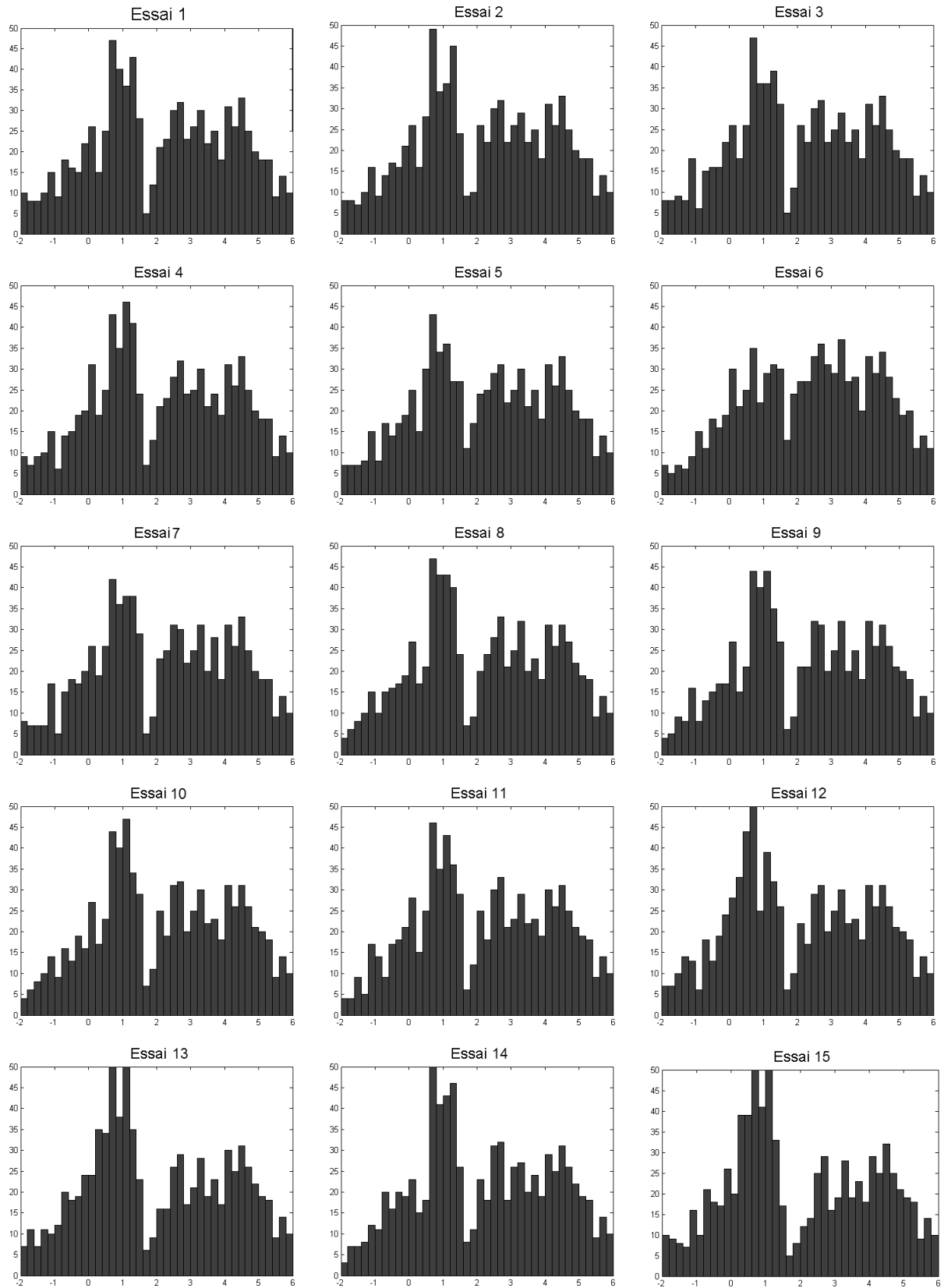


FIGURE 6.20 – Histogrammes des périodes orbitales finales après 10^{10} années, en suivant le modèle de la figure 6.13, avec modifications des équations du mouvement (*cf.* table 6.3)

L'essai où les équations sont les plus simplifiées est l'essai 15. Dans cet essai, toutes les précessions sont supprimées, y compris les précessions dues aux marées (conservatives) et à la correction relativiste. Il serait donc possible que la migration soit provoquée par la seule combinaison de l'effet de Kozai et des marées dissipatives. Nous obtenons des équations simplifiées où seuls les termes liés à l'effet de Kozai et aux marées dissipatives sont présents :

$$\dot{\vec{L}}_j = \underbrace{K_j n_1 \left(f_4(e_1) \sqrt{1-e_1^2} \frac{\omega_j}{2n_1} (\hat{s}_j - \cos \theta_j \hat{k}_1) - f_1(e_1) \frac{\omega_j}{n_1} \hat{s}_j + f_2(e_1) \hat{k}_1 + \frac{(\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j)(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{\omega_j}{n_1} \right)}_M \quad (6.43)$$

$$\dot{\vec{G}}_1 = \underbrace{5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \vec{e}_1}_B - \dot{\vec{L}}_0 - \dot{\vec{L}}_1 \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1 = & \underbrace{\gamma \frac{(1-e_1^2)}{G_1} \left(5(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 \right)}_F \\ & - \underbrace{\sum_{j=0}^1 \frac{K_j}{\beta_1 a_1^2} \left\{ \underbrace{f_4(e_1) \frac{\omega_j}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \hat{k}_1}_{K_{a_j}} - \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_j \frac{\omega_j}{n_1} - 9f_5(e_1) \right) \vec{e}_1 \right\}}_{K=\sum_j K(j)} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Il convient maintenant d'analyser plus encore les termes restants. Que se passe-t-il si nous ne considérons qu'une partie du terme $K(j)$? Nous simulons 8 nouveaux essais, présentés à la table 6.4 et à la figure 6.21.

D'après ces histogrammes (figure 6.21), il semblerait que le terme de marées dissipatives de \vec{e}_1 soit important dans la migration des planètes. Supprimer la contribution de la planète et celle de l'étoile primaire (essai 21) ne permet plus d'observer d'accumulation. Cependant, si on analyse le fichier des périodes orbitales finales dans le cas de l'essai 21, on peut voir qu'une partie des évolution se solde par une période orbitale finale valant "NaN". Nous ne pouvons dès lors pas supprimer tout ce terme. Néanmoins, lorsqu'on supprime K_{a_j} ($j = 0, 1$), l'histogramme présente encore une accumulation. De plus, nous savons que supprimer le terme de marées dissipatives pour le spin n'a pas d'influence sur le résultat final (essais 18-19-20). Avant de donner une forme encore plus simplifiée des équations, nous analysons deux nouveaux essais : les essais 22 et 23. Ceux-ci ne tiennent plus compte des marées dans les spins (et dès lors ne tiennent plus compte des marées dans le moment angulaire orbital). De plus, nous pouvons simplifier le terme des marées dissipatives dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$, en laissant de côté les termes K_{a_j} ($j = 0, 1$). En effet, si nous nous intéressons à la norme du vecteur excentricité, e_1 , le produit scalaire des termes K_{a_j} par \vec{e}_1 est nul¹⁶ et ceux-ci ne jouent donc pas de rôle dans la variation de e_1 . Il ne nous reste dès lors, en ce qui concerne les marées, que les termes K_{b_j} ($j = 0, 1$). Ce sont les

16. En effet, comme développé dans l'Annexe F, $\dot{e}_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_1}{e_1}$.

Essais	Modification des équations
Essai 16	$K_{a_0} = 0$ et $K_{a_1} \neq 0$
Essai 17	$K_{b_0} = 0$ et $K_{b_1} \neq 0$
Essai 18	$\dot{\vec{L}}_1 = 0$ et $\dot{\vec{L}}_0 \neq 0$
Essai 19	$\dot{\vec{L}}_0 = 0$ et $\dot{\vec{L}}_1 \neq 0$
Essai 20	$\dot{\vec{L}}_j = 0$
Essai 21	Ne pas considérer les termes $K(j=0)$ et $K(j=1)$ dans l'équation de $\dot{\vec{e}}_1$
Essai 22	$\dot{\vec{L}}_j = 0$, $K_{a_0} = 0$, $K_{a_1} = 0$, $K_{b_0} = 0$ et $K_{b_1} \neq 0$
Essai 23	$\dot{\vec{L}}_j = 0$, $K_{a_0} = 0$, $K_{a_1} = 0$, $K_{b_1} = 0$ et $K_{b_0} \neq 0$

TABLE 6.4 – Description des essais où au moins un terme change par rapport aux équations simplifiées (6.43)-(6.45). Les différents histogrammes correspondants sont repris à la figure 6.21

uniques termes des marées qui sont encore pris en considération. Les deux essais vont nous permettre de déterminer lequel de K_{b_0} ou K_{b_1} est à conserver. Au vu des histogrammes obtenus (essais 22-23), nous constatons que les deux termes ont de l'influence. Cependant, nous ne gardons que celui qui a le plus d'effet. Nous comparons les ordres de grandeurs de K_{b_0} et K_{b_1} . Ceux-ci sont directement proportionnels à celui de K_j :

$$K_j = \Delta t_j \frac{3k_{L_j} k^2 m_{(1-j)}^2 R_j^5}{a_1^6}.$$

Les paramètres différents entre les deux termes sont le rayon du corps R_j , le nombre de Love k_{L_j} , la masse $m_{(1-j)}$, ainsi que le temps de décalage Δt_j . Les autres paramètres/variables sont identiques dans les deux cas. Nous prenons comme valeurs de référence, les valeurs du système HD80606 (table 6.1) :

- $R_0 \propto 10^{-2}$ et $R_1 \propto 10^{-4}$,
- $m_0 \propto 1$ et $m_1 \propto 10^{-3}$,
- $k_{L_0} \propto 10^{-2}$ et $k_{L_1} \propto 10^{-1}$,
- $\Delta t_0 \propto 10^{-9}$ et $\Delta t_1 \propto 10^{-6}$.

Dès lors, l'expression $\Delta t_j k_{L_j} m_{(1-j)} R_j^5$ est de l'ordre de :

- 10^{-24} dans le cas de $j = 0$,
- 10^{-27} dans le cas de $j = 1$.

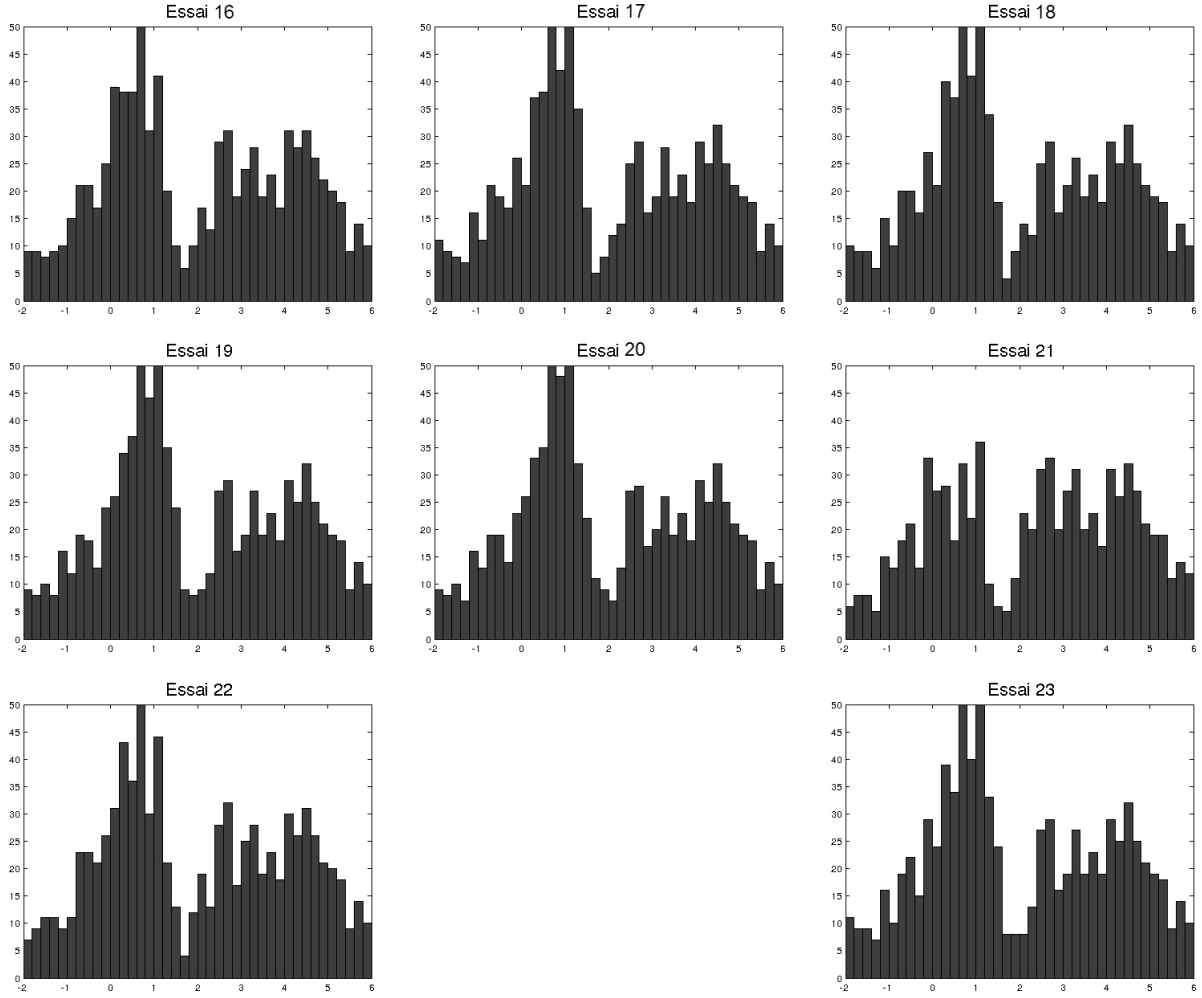


FIGURE 6.21 – Histogrammes des périodes orbitales finales après 10^{10} années, en suivant le modèle de la figure 6.13, avec modifications des équations simplifiées (*cf.* table 6.4)

Le rapport de ces deux nombres implique que le terme $j = 0$ est plus important. Les marées subies par l'étoile ($j = 0$) sont donc dominantes, et nous décidons de garder uniquement le terme K_{b_0} dans la suite. Ceci signifie que la marée subie par l'étoile de par la présence de la planète est plus forte que la marée subie par la planète de par la présence de l'étoile primaire. Les équations les plus simples que nous puissions avoir et qui reproduisent l'accumulation sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{L}}_j = 0, \\ \dot{\vec{G}}_1 = 5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \vec{e}_1, \\ \dot{\vec{e}}_1 = \gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} \left(5(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2) \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 \right) + \frac{K_0}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right) \vec{e}_1, \end{array} \right.$$

où nous avons encore simplifié $\dot{\vec{e}}_1$ par $\omega_0 = n_1$, du fait de la synchronisation des périodes

orbitale et de rotation. De plus, nous pouvons considérer que $\theta_0 = 0$, car nous ne faisons plus évoluer les spins ni de l'étoile primaire ni de la planète.

Nous aimerions maintenant exprimer ces équations de façon plus explicite, en écrivant un système de la forme

$$(\dot{a}_1, \dot{e}_1, \frac{d(\cos i)}{dt}, \dot{\varpi}_1).$$

Pour les obtenir, nous partons des formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1}{e_1}, \\ \frac{d(\cos i)}{dt} = \frac{5\gamma e_1^2 \cos i \sin^2 i \sin 2\varpi_1}{2\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)}}, \\ \dot{\varpi}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot (\hat{k}_1 \times \vec{e}_1)}{e_1^2}, \\ \dot{a}_1 = \frac{2\dot{e}_1 e_1}{(1 - e_1^2)} + \frac{2\vec{G}_1 \cdot \dot{\vec{G}}_1}{G_1^2}. \end{array} \right.$$

Ces formules, ainsi que tous les calculs intermédiaires pour obtenir le système d'équations suivant sont détaillés à l'Annexe F. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \frac{5}{2} \frac{\gamma \sqrt{(1 - e_1^2)} e_1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \sin^2 i \sin 2\varpi_1 + \frac{K_j e_1}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right), \\ \frac{d(\cos i)}{dt} = \frac{5\gamma e_1^2 \cos i \sin^2 i \sin 2\varpi_1}{2\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)}}, \\ \dot{\varpi}_1 = 5\gamma(1 - e_1^2) \sin^2 i \cos^2 \varpi_1, \\ \dot{a}_1 = \frac{10\gamma e_1^2 \sin^2 i \sin 2\varpi_1 \sqrt{a_1}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 (1 - e_1^2)}} + \frac{2K_j e_1^2}{\beta_1 a_1 (1 - e_1^2)} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right), \end{array} \right.$$

où

$$\gamma = \frac{3k^2 m_2 \beta_1 a_1^2}{4a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad K_j = \Delta t_j \frac{3k_{L_j} k^2 m_{(1-j)}^2 R_j^5}{a_1^6}.$$

Ce système ne dépend que des variables a_1 , e_1 , i et ϖ_1 . Tous les autres paramètres et variables sont constants. La prochaine étape de ce travail serait d'intégrer ce système, beaucoup plus simple que le système d'équations initial ou même que notre système simplifié, tous les deux exprimés avec des équations vectorielles. Il s'agit de vérifier que ce système simplifié produise le même histogramme que celui du système complet, tout en permettant un gain de temps considérable. C'est une perspective que nous avons pas eu le temps d'explorer.

En conclusion, nos résultats nous conduisent à penser que l'accumulation de périodes autour de trois jours serait due à la combinaison de l'effet de Kozai et de l'effet de marée

dissipative subie par l'étoile primaire de par la présence de la planète. Uniquement le terme dans la direction de \vec{e}_1 jouerait un rôle dans ce mécanisme.

Conclusion

L'étude des systèmes hiérarchiques composés d'une binaire et d'un troisième corps est un sujet en pleine expansion, à en juger par la littérature de plus en plus importante. L'approfondissement de la théorie octupole grâce aux corrections relativistes et aux effets de marée est donc bienvenu.

Les deux premiers chapitres ont proposé une mise en contexte, où nous avons introduit les concepts dont traite ce travail. Nous y avons aussi synthétisé les idées principales de la théorie octupole et introduit les calculs de moyennisation par rapport aux courtes périodes.

Dans les chapitres 3 et 4 de notre travail, nous avons travaillé analytiquement, en développant tous les calculs nécessaires à l'obtention des équations du mouvement avec corrections. Nous avons compris l'origine des expressions des composantes hamiltoniennes, et recalculé chaque moyennisation. A la fin des deux chapitres, nous avons comparé les expressions de l'Hamiltonien avec celles de deux articles de la littérature ([27] et [12]), pour lesquelles les notations et formalismes différaient. Trois tables récapitulatives des expressions se trouvent à la fin des chapitres.

Les résultats numériques sont présentés dans le chapitre 5. C'est un chapitre riche en conclusions et résultats. Outre le fait qu'il nous a permis de déterminer une distance maximale au delà de laquelle on peut négliger les effets de marée (pour trois masses données), il nous a permis de constater que les corrections relativistes sont plus importantes que les effets de marée. En effet, d'une part, les ordres de grandeurs des corrections relativistes sont supérieurs à ceux des corrections de marée, et d'autre part, la distance entre la planète et l'étoile mère joue un plus grand rôle dans les effets de marée. L'étude séparée des différents effets a permis de distinguer précisément l'importance de chaque correction. Après cette analyse de l'ordre des composantes hamiltoniennes pour quelques systèmes particuliers, nous avons généralisé ce résultat en traçant des cartes évaluant les ordres de grandeurs des trois composantes hamiltoniennes pour un large éventail de masses et de demi-grands axes du deuxième corps. Pour chaque carte, le corps central est de masse solaire. Nous étudions deux configurations : la troisième masse est tout d'abord jumelle de la Terre avant de la choisir jumelle de Jupiter. Pour ces deux configurations, la masse du deuxième corps varie entre la masse de la Terre et la masse solaire. Outre une généralisation des résultats précédents, ces cartes offrent une prédiction du comportement de tout système représenté par ces cartes, à savoir tout système tel que le corps central est de masse solaire et tel que le troisième corps est de masse semblable à Jupiter ou à la Terre. Pour appuyer cela, nous détaillons l'évolution de quatre systèmes représentés sur les cartes, en traçant, notamment, les évolutions des excentricités, avec corrections de

marée, avec corrections relativistes et enfin avec les deux corrections.

Le sixième chapitre nous a permis d'aborder la question de la formation des Jupiters chauds. En effet, la migration des planètes extra-solaires près de leur étoile mère, telle que nous l'avons observée dans ce travail, est une hypothèse de la formation des Jupiters chauds. Ce chapitre nous a aussi permis de nous intéresser aux effets de Kozai et aux marées dissipatives. Les équations utilisées dans ce chapitre étaient plus générales, et permettaient de tenir compte des orbites inclinées. Nous avons aussi tenu compte des marées subies par la planète ainsi que les orientation des spins, ce qui n'était pas le cas dans la première partie de ce travail. Le développement du potentiel n'allait plus jusqu'à l'ordre trois, mais jusqu'à l'ordre deux seulement. Enfin, après avoir reproduit l'histogramme des périodes orbitales finales de Fabrycky et Tremaine [12], nous avons tenté de comprendre d'où vient cette accumulation de petites périodes en analysant les équations. Nous avons simplifié au maximum notre système d'équations en ne conservant que les termes essentiels. Nous avons conclu que la migration des planètes serait due à la combinaison de l'effet de Kozai associé aux marées dissipatives (uniquement le terme présent dans $\dot{\vec{e}}_1$). Nous avons réécrit ces équations en termes d'éléments orbitaux.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Tout d'abord, il serait intéressant d'exploiter le modèle simplifié au Chapitre 6, et l'intégrer avec un intégrateur symplectique pour reproduire les résultats de Fabrycky et Tremaine [12]. Une autre perspective serait de s'intéresser à d'autres éléments képlériens que a_{final} , par exemple l'excentricité du compagnon ou encore l'inclinaison mutuelle. Enfin, nous pourrions appliquer nos modèles d'évolution et de formation à des systèmes réels, les données de tels systèmes étant de plus en plus précises. Tout ceci constitue des pistes de travail, que nous espérons, seront étudiées.

Bibliographie

- [1] Auquier F., *Étude du problème des trois corps avec application aux systèmes binaires*, janvier 2011, FUNDP
- [2] Astronomia, Cours d'Astronomie Générale, Variables à éclipses http://astronomia.fr/3eme_partie/variables/varEclipses.php, consulté le 12 mars 2013
- [3] Bolmont E., *Evolution et habitabilité de systèmes planétaires autour d'étoiles de faible masse et de naines brunes*, Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers, Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux, http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/93/36/68/PDF/BOLMONT_EMELINE_2013.pdf, Janvier 2014, consulté le 25 mars 2014
- [4] Carletti T., Libert A.-S., *Géométrie symplectique*, 2009, FUNDP
- [5] Corriea A., *Évolution à long terme de la rotation de Vénus*, Université Paris 7, Novembre 2001
- [6] Correia A. C. M., Laskar J., Tidal evolution of exoplanets, *Exoplanets*, University of Arizona Press, pages 534-575, 2010
- [7] Correia A. C. M., Laskar J., Farago F., Boué G., Tidal evolution of hierarchical and inclined systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, pages 105-130, 2011
- [8] Darling D.avid, The Encyclopedia of Science, Closed binary, http://www.daviddarling.info/encyclopedia/C/close_binary.html, consulté le 12 mars 2013
- [9] Einstein A., Infeld L., and Hoffmann B., 1938, Ann. Math. 39, 65
- [10] EssayWeb, Stellar Evolution, <http://essayweb.net/astronomy/blackhole.shtml>, consulté le 12 mars 2013
- [11] Esslinger O., Astronomie et Astrophysique, Le diagramme de Hertzsprung-Russell, <http://www.astronomes.com/le-soleil-et-les-etoiles/le-diagramme-de-hertzsprung-russell/>, consulté le 13 mars 2013
- [12] Fabrycky D., Tremaine S., Shrinking binary and planetary orbits by Kozai cycles with tidal friction, *The Astrophysical Journal*, 669, pages 1298-1315, novembre 2007
- [13] Ford E. B., Kozinsky B., and Rasio F. A., Secular evolution of hierarchical triple star systems, *The astrophysical journal*, 535, 385-401, 20 mai 2000
- [14] Forum, <http://projectavalon.net/forum4/showthread.php?30405-Here-and-Now...What-s-Happening/page1045>, consulté le 13 mars 2013

- [15] Füzfa A., Bruneton J.-P., *Cours de gravitation relativiste et cosmologie*, 2011-2012, FUNDP
- [16] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, series, and products*; Academic Press, 1980
- [17] Imagina Science, Forces de marée, <http://www.imaginascience.com/pratique/forces-de-maree.php>, consulté le 23 mars 2013
- [18] Imago Mundi, Lobe et surface de Roche, <http://www.cosmovisions.com/lobedeRoche.htm>, consulté le 12 mars 2013
- [19] Laskar J., Les variables de Poincaré et le développement de la fonction perturbatrice, p. 16, *Groupe de travail sur la lecture des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris, février 1988
- [20] Lericque S., Les étoiles doubles et multiples <http://lericque.simon.free.fr/MON%20SITE/ARTICLES/etoiles%20doubles/etoiledoubles.htm>, consulté le 13 mars 2013
- [21] Libert A.-S., Delsate N., Interesting dynamics at high mutual inclination in the framework of the Kozai problem with an eccentric perturber, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422, pages 2725-2736, Février 2012
- [22] Mardling R. A., Aarseth S. J., Tidal interactions in star cluster simulations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 321, Issue 3, pages 398-420, 2001
- [23] Matrice d'inertie, Lycée Lislet Geoffroy, Sciences industrielles pour l'ingénieur, consulté le 20 novembre 2013
- [24] Migaszewski C., Goździewski K., Secular dynamics of a coplanar, non-resonant planetary system under the general relativity and quadrupole moment perturbations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 392, Issue 1, 2009
- [25] Mignard F., The evolution of the lunar orbit revisited I, *Moon and the Planets*, Volume 20, pages 301-315, Mai 1979
- [26] Murray C.D., Dermott S.F., *Solar System Dynamics*, Chapter 4 : Tides, Rotation and Shape, Cambridge University Press, Cambridge, 1999
- [27] Nagasawa M., Lin D. N. C., The dynamical evolution of the short-period extrasolar planet around Andromedae in the pre-main sequence stage, *The Astrophysical Journal*, 632, pages 1140-1156, Octobre 2005
- [28] Nasa, Stellar evolution, http://www.nasa.gov/audience/forstudents/9-1&2/features/stellar_evol_feat_912.html, consulté le 5 mai 2013
- [29] The novae phenomenon, <http://nrumiano.free.fr/Estars/fading.html>, consulté le 12 mars 2013
- [30] Observatoire de Besançon, Aide à l'initiation à l'astronomie, La classification des étoiles, <http://lunap.obs-besancon.fr/lunap/Niveau1/soleiletoiles/Textes/classification.htm>, consulté le 13 mars 2013

- [31] Observatoire de Paris, Astrophysique sur mesure, http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_mouvement-terre-lune/images/ellipse.jpg, consulté le 3 avril 2013
- [32] Observatoire de Paris, La limite de Roche, http://media4.obspm.fr/exoplanetes/pages_outil-roche/limite-roche.html, consulté le 22 avril 2013
- [33] Observatoire de Paris, Fenêtres sur l'Univers, Diagramme HR, <http://media4.obspm.fr/public/FSU>, consulté le 12 mars 2013
- [34] Observatoire de Paris, Mécanique céleste, Temps et Calendriers : la gravitation newtonienne, En savoir plus : l'excès d'avance du périhélie de Mercure, http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_gravitation/mctc-avance-mercure.html, consulté le 4 avril 2013
- [35] Observatoire de Paris, Fenêtres sur L'Univers, Systèmes binaires et multiples, http://media4.obspm.fr/public/FSU/pages_binaire/introduction-binaire.html, consulté le 5 mai 2013
- [36] Observatoire de Paris, Astronomie et mécanique céleste, La gravitation universelle et la relativité, http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_gravitation/index.html, consulté le 5 mai 2013
- [37] Observatoire astronomique de Strasbourg, <http://astro.u-strasbg.fr/~derriere/teaching/cours-evolution-HR-2009.pdf>, consulté le 21 mars 2013
- [38] Perez J., *Cours de Gravitation classique*, Ecole nationale supérieure des techniques avancées (E.N.S.T.A.), 2004-2005
- [39] Physics, <http://physics.stackexchange.com/questions/47783/what-is-the-exact-gravitational-force-between-two-masses-including-relativistic>, consulté le 31 mars 2013
- [40] Richardson D. L., Kelly T. J., Two-body motion in the post-newtonian approximation, *Celestial Mechanics*, Volume 43, 1988, pp. 193-210
- [41] Schutz B. F., *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [42] Science Étonnante, Lentilles gravitationnelles, <http://sciencetonnante.wordpress.com/2010/12/17/les-lentilles-gravitatio-noel/>, consulté le 31 mars 2013
- [43] Smart W. M., *Celestial Mechanics*, Longmans, London, New York, 1953
- [44] Stine Kildegaard Poulsen, *Tidal Deformation of the Solid Earth*, Faculty of Science, University of Copenhagen, mars 2009, http://cct.gfy.ku.dk/thesis/thesis_stinekp.pdf, consulté le 5 septembre 2013
- [45] Le système solaire, les points de Lagrange, <http://www.le-systeme-solaire.net/aide-point-de-lagrange.html>
- [46] Techno Sciences, Binaires à éclipses, <http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=7221>, consulté le 11 avril 2013
- [47] Université de Vienne, Binary catalogue, <http://www.univie.ac.at/adg/multiple/introduction.html>, consulté le 12 mars 2013

- [48] Wikipedia, Kepler orbit, http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_orbit, consulté le 17 mars 2013
- [49] Wright J. T., Fakhouri O., Marcy G. W., Han E., Feng Y., Johnson John Asher, Howard A. W., Fischer D. A., Valenti J. A., Anderson J., Piskunov, N., The Exoplanet Orbit Database, *the Astronomical Society of the Pacific*, Volume 123, issue 902, pp.412-422, Avril 2011, exoplanets.org, consulté le 6 mai 2014
- [50] Wis Phisics, Physique, biologie et technologie, La limite de Roche, <http://www.wisphysics.es/wp-content/uploads/2008/01/limite-de-roche.jpg>, consulté le 23 mars 2013
- [51] Wolfram MathWorld, Gamma function, <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>, consulté le 26 août 2013
- [52] Wolfram, Eric Weisstein's World of Science, Love Numbers, <http://scienceworld.wolfram.com/physics/LoveNumber.html>, consulté le 5 septembre 2013

Annexe A

Moyennisation : changement de variables

Dans cette annexe, nous développons le calcul nécessaire à la moyennisation par rapport aux anomalies moyennes. Nous détaillons le changement de variables utilisé pour obtenir la forme finale utilisée dans tous les calculs de ce travail. Pour cela, nous repartons de l'équation de Kepler¹ et la dérivons :

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E \\ \Leftrightarrow dM &= (1 - e \cos E) dE, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où E est l'anomalie excentrique. Elle est représentée sur la figure A.1.

Pour établir le lien entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique, nous nous aidons de la figure A.1 :

$$\begin{aligned} \tan f &= \frac{\sin f}{\cos f} = \frac{a \sin E \sqrt{1 - e^2}}{a \cos E - ae} \\ &= \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{\cos E - e}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Nous dérivons l'expression (A.2) et obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{df} (\tan f) &= \frac{d}{dE} \left(\frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{\cos E - e} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{df}{\cos^2 f} &= \frac{\cos E^2 \sqrt{1 - e^2} - e \cos E \sqrt{1 - e^2} + \sin E^2 \sqrt{1 - e^2}}{(\cos E - e)^2} dE \\ \Leftrightarrow \frac{df}{\cos^2 f} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(\cos E - e)^2} (1 - e \cos E) dE. \end{aligned}$$

1. L'équation de Kepler permet de lier l'anomalie excentrique à l'anomalie moyenne. L'anomalie moyenne est définie par $M = n(t - t_0)$, où n est le moyen mouvement et t_0 est le temps de passage au périastre. On note que $n = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période orbitale.

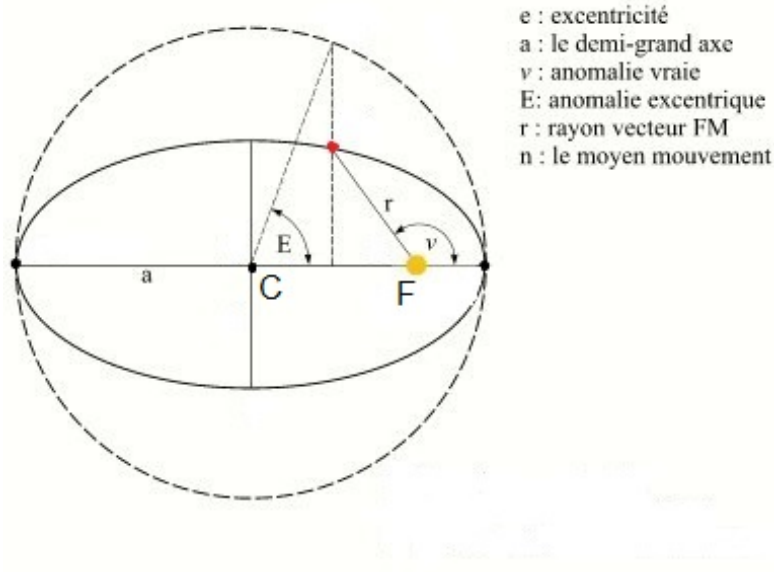


FIGURE A.1 – Orbite du corps rouge dont le corps jaune est le foyer (F). L'anomalie vraie, f , est représentée par ν , r est la distance entre les deux corps et E est l'anomalie excentrique, figure issue de [31]

En utilisant l'égalité (A.1), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \frac{df}{\cos^2 f} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(\cos E - e)^2} dM \\ \Leftrightarrow \frac{dM}{df} &= \frac{(\cos E - e)^2}{\sqrt{1-e^2} \cos^2 f}. \end{aligned}$$

Or,

$$r \cos f = ae - a \cos E.$$

Cette égalité peut se déduire facilement de la figure A.1. En effet, ae est la distance entre le centre du cercle C et le foyer de l'ellipse F .

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} -a(\cos E - e) &= r \cos f \\ \Leftrightarrow (\cos E - e)^2 &= \frac{r^2 \cos^2 f}{a^2}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Au regard de l'équation (A.3), nous remplaçons $(\cos E - e)^2$ par $\frac{r^2 \cos^2 f}{a^2}$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dM}{df} &= \frac{r^2 \cos^2 f}{\sqrt{1-e^2} a^2 \cos^2 f} \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2} a^2}. \end{aligned}$$

Nous remplaçons r^2 par sa valeur, en utilisant l'égalité (2.9), pour obtenir l'expression \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}f} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos f)^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2a^2}} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos f)^2}.$$

Annexe B

Lagrangien (corrections relativistes)

Reprenons le Lagrangien écrit dans les coordonnées \vec{r}_0^* et \vec{r}_1^* (équation (3.9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \underbrace{\frac{1}{2}m_0\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2m_0m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \left(m_0(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)^2 + m_1(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)^2 \right)}_{=A} \\ & + \underbrace{\frac{k^2m_0m_1}{2rc^2} \left(3(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*) - 7\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2}(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right)}_{=B}. \end{aligned}$$

La formulation de \mathcal{L} étant assez longue, nous scindons en deux parties sa réécriture dans les nouvelles coordonnées \vec{r}_1 et \vec{r}_2 : nous nous occuperons tout d'abord de la partie nommée A avant de réexprimer la partie B.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}m_0\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* + \frac{k^2m_0m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \left(m_0(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^*)^2 + m_1(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_0}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_0^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 - 2m_1\dot{\vec{r}}\Gamma \right) + \frac{1}{2} \frac{m_1}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_1^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 + 2m_1\dot{\vec{r}}\Gamma \right) \\ &\quad + \frac{k^2m_0m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \left\{ \frac{m_0}{(m_0 + m_1)^4} (m_1^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 - 2m_1\dot{\vec{r}}\Gamma)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1}{(m_0 + m_1)^4} (m_0^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 + 2m_0\dot{\vec{r}}\Gamma)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_0}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_0^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - 2m_1\dot{\vec{r}}\Gamma \right) + \frac{1}{2} \frac{m_1}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_1^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + 2m_1\dot{\vec{r}}\Gamma \right) \\ &\quad + \frac{k^2m_0m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \frac{1}{(m_0 + m_1)^4} \left\{ m_0m_1^4(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + m_1m_0^4(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right) \\ &= \frac{m_0m_1}{2(m_0 + m_1)} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \frac{k^2m_0m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \frac{m_0m_1}{(m_0 + m_1)^4} (m_1^3 + m_0^3)(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right) \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Chaque terme dans lequel apparait $\frac{1}{c^2}\Gamma$ est négligé car Γ est d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$. D'où

$$\frac{1}{c^2}\Gamma \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

ce que nous négligeons. Nous négligeons aussi les termes Γ^2 , d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right)$ également.

$$\begin{aligned}
B &= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left(3(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_0^* + \dot{\vec{r}}_1^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^*) - 7\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \dot{\vec{r}}_1^* - \frac{1}{r^2}(\dot{\vec{r}}_0^* \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}}_1^* \cdot \vec{r}) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right) \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ 3 \left(\frac{-m_1 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) \cdot \left(\frac{-m_1 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) + 3 \left(\frac{m_0 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) \cdot \left(\frac{m_0 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) \right. \\
&\quad \left. - 7 \left(\frac{-m_1 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) \cdot \left(\frac{m_0 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{-m_1 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \cdot \vec{r} \right) \left(\frac{m_0 \dot{\vec{r}} + \Gamma}{m_0 + m_1} \cdot \vec{r} \right) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right\} \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ \frac{3}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_1^2 (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 - 2m_1 \dot{\vec{r}} \Gamma \right) + \frac{3}{(m_0 + m_1)^2} \left(m_0^2 (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 + 2m_0 \dot{\vec{r}} \Gamma \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{7}{(m_0 + m_1)^2} \left(-m_0 m_1 (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \Gamma^2 - m_1 \dot{\vec{r}} \Gamma + m_0 \Gamma \dot{\vec{r}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r^2 (m_0 + m_1)^2} (-m_1 \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \Gamma \vec{r})(m_0 \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \Gamma \vec{r}) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right\} \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ \frac{3(m_0^2 + m_1^2)}{(m_0 + m_1)^2} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \frac{6(m_0 - m_1) \dot{\vec{r}} \Gamma}{(m_0 + m_1)^2} - \frac{7}{(m_0 + m_1)^2} \left(-m_1 m_0 (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{r}} \Gamma (m_0 - m_1) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r^2 (m_0 + m_1)^2} \left(-m_0 m_1 (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 + \Gamma^2 \vec{r}^2 - m_1 (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}_1^2) \Gamma + m_0 (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}^2) \Gamma \right) - \frac{k^2}{r}(m_0 + m_1) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ \frac{(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})}{(m_0 + m_1)^2} (3(m_0^2 + m_1^2) + 7m_0 m_1) + \frac{m_0 m_1 (\vec{r} \cdot \vec{r})^2}{r^2 (m_0 + m_1)^2} - \frac{k^2 (m_1 + m_0)}{r} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ \frac{(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})}{(m_0 + m_1)^2} (3(m_0 + m_1)^2 + m_0 m_1) + \frac{m_0 m_1 (\vec{r} \cdot \vec{r})^2}{r^2 (m_0 + m_1)^2} - \frac{k^2 (m_1 + m_0)}{r} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) (3 + \nu) + \frac{\nu (\vec{r} \cdot \vec{r})^2}{r^2} - \frac{k^2 (m_1 + m_0)}{r} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{B.2}
\end{aligned}$$

où $\nu = \frac{m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2}$. Le Lagrangien, somme de (B.1) et (B.2), est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_0 m_1}{2(m_0 + m_1)} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \frac{k^2 m_0 m_1}{r} + \frac{1}{8c^2} \frac{m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^4} (m_1^3 + m_0^3) (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \\ & + \frac{k^2 m_0 m_1}{2rc^2} \left\{ (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) (3 + \nu) + \frac{\nu (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})^2}{r^2} - \frac{k^2 (m_1 + m_0)}{r} \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right). \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Annexe C

Harmoniques sphériques

Soit V , le potentiel gravitationnel qui satisfait l'équation de Laplace (C.1) :

$$\nabla^2 V = 0. \quad (\text{C.1})$$

On dira qu'une fonction V est *homogène de degré n* si elle satisfait l'équation d'Euler (C.2) :

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = nV. \quad (\text{C.2})$$

Une fonction qui respecte à la fois (C.1) et (C.2) est une *harmonique solide sphérique*. Une solution évidente de (C.1) est

$$V = r^n S_n(\mu, \phi),$$

où (r, θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques et $\mu = \cos \theta$. L'équation de Laplace se réduit alors à

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial S_n}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2} + n(n+1) S_n = 0.$$

Cette équation est l'équation de Legendre et toute fonction la satisfaisant est une fonction *spherical surface harmonic* de degré n .

Dans notre travail, les déformations de spin et de marée possèdent des symétries axiales et l'équation de Legendre se réduit à l'équation (C.3) :

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu} + n(n+1) \mathcal{P}_n(\mu) = 0, \quad (\text{C.3})$$

où $\mathcal{P}_n(\mu)$ sont les *polynômes de Legendre* de degré n . Ce sont les solutions de l'équation de Legendre. Ce sont des harmoniques zonales. Ils sont définis par la formule de Rodrigues (C.4) :

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} ((\mu^2 - 1)^n). \quad (\text{C.4})$$

Les premiers polynômes de Legendre sont

- $\mathcal{P}_0(\mu) = 1$,
- $\mathcal{P}_1(\mu) = \mu$,
- $\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$,

- $\mathcal{P}_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$.

Notons que $\mathcal{P}_n(1) = 1 \forall n$.

Les harmoniques sphériques sont des fonctions orthogonales et leur double intégrale sur la surface de la sphère a d'utiles propriétés, notamment :

- Pour $Y_m(\mu, \phi)$ et $S_n(\mu, \phi)$, deux harmoniques tels que $n \neq m$, alors

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_m(\mu, \phi) S_n(\mu, \phi) \, d\mu \, d\phi = 0, \quad (\text{C.5})$$

- Pour $S_n(\mu', \phi')$ et $\mathcal{P}_n(\mu)$, deux harmoniques de même degré n , nous avons :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_n(\mu', \phi') \mathcal{P}_n(\cos \psi) \, d\mu' \, d\phi' = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(\mu, \phi). \quad (\text{C.6})$$

Annexe D

Fonction Gamma

La fonction *Gamma* est une extension de la fonction factorielle aux nombres réels et complexes. Pour tout nombre complexe à partie réelle positive, la fonction Gamma est égale à

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La fonction $\Gamma()$ peut être prolongée dans l'ensemble des complexes, exceptés en $-1, -2, -3, \dots$. Le lien entre la fonction factorielle et la fonction Gamma est donné par

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, nous avons $\Gamma(1) = 1$.

Nous notons également deux identités :

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{x \sin(\pi x)},$$

ainsi que la formule de Réflexion d'Euler

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \quad (\text{D.1})$$

La formule de Réflexion d'Euler (D.1) permet de calculer $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ... A l'aide de la formule (D.1), nous trouvons également que $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

Dans Matlab, la fonction `gamma(.)` donne la valeur de cette fonction pour tout nombre complexe. La valeur en $\frac{-3}{2}$ est trouvée de cette manière.

Des informations plus détaillées sur la fonction Gamma peuvent être consultées sur le site [51].

Annexe E

Marées dissipatives

Cette annexe contient les calculs de moyennisation liés aux effets de marée. La force \vec{F}_j ($j = 0, 1$) liée aux effets de marée (dissipatifs et conservatifs) est donnée par Mignard [25] :

$$\vec{F}_j = -3 \frac{k_{L_j} k^2 m_{1-j}^2 R_j^5}{r_1^{10}} \Delta t_j \left\{ 2(\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1) \vec{r}_1 + r_1^2 (\vec{r}_1 \times \vec{L}_1 + \dot{\vec{r}}_1) \right\}. \quad (\text{E.1})$$

Les développements permettant d'obtenir cette force à partir du potentiel $U_{\text{marée}}$ sont disponibles dans l'ouvrage [5] et Mignard [25].

Nous ne développons pas toutes les moyennisations, uniquement celle de $\dot{\vec{G}}_1$. Par la définition du moment de force appliqué à (E.1), nous avons

$$\dot{\vec{G}}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1,$$

et dès lors par l'article de Mignard [25] :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{G}}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ &= \sum_{j=0}^1 \frac{-3k_{L_j} k^2 m_{1-j}^2 R_j^5 \Delta t_j}{r_1^8} \left\{ (\vec{r}_1 \cdot \vec{L}_j) \vec{r}_1 - r_1^2 \vec{L}_j + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 \right\} \\ &= \sum_{j=0}^1 \frac{-3k_{L_j} k^2 m_{1-j}^2 R_j^5 \Delta t_j}{r_1^8} \left\{ C_j \omega_j (\vec{r}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_j) \vec{r}_1 - r_1^2 C_j \omega_j \hat{\vec{s}}_j + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Dans la suite de cette annexe, nous nous basons sur l'article de [?]. Nous moyennons¹ tout d'abord le premier terme :

$$\begin{aligned}
C_j \omega_j \left\langle \frac{(\vec{r}_1 \cdot \hat{s}_j) \vec{r}_1}{r_1^8} \right\rangle &= C_j \omega_j \hat{s}_j \left\langle \frac{(\vec{r}_1^T \vec{r}_1)}{r_1^8} \right\rangle \\
&= C_j \omega_j \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2a_1^6} f_4(e_1) (\hat{s}_j - \hat{s}_j \hat{k}_1^T \hat{k}_1) + \frac{(6+e_1^2)}{4a_1^6(1-e_1^2)^{9/2}} \hat{s}_j \vec{e}_1^T \vec{e}_1 \\
&= C_j \omega_j \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2a_1^6} f_4(e_1) (\hat{s}_j - (\hat{k}_1 \cdot \hat{s}_j) \hat{k}_1) + \frac{(6+e_1^2)}{4a_1^6(1-e_1^2)^{9/2}} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \vec{e}_1. \\
&= C_j \omega_j \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2a_1^6} f_4(e_1) (\hat{s}_j - \cos \theta_j \hat{k}_1) + \frac{(6+e_1^2)}{4a_1^6(1-e_1^2)^{9/2}} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \vec{e}_1,
\end{aligned}$$

où $f_4(e_1) = \frac{1+\frac{3}{2}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4}{(1-e_1^2)^5}$, où θ_j sont les obliquités par rapport au plan orbital de m_1 et donc $\cos \theta_j = \hat{s}_j \cdot \hat{k}_1$ et où l'on a utilisé l'équation (69) de l'annexe de [7], à savoir

$$\left\langle \frac{\vec{r}_1^T \vec{r}_1}{r_1^8} \right\rangle = \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2a_1^6} f_4(e_1) \left(1 - \hat{k}_1^T \hat{k}_1\right) + \frac{6+e_1^2}{4a_1^6(1-e_1^2)^{9/2}} \vec{e}_1^T \vec{e}_1$$

pour conclure.

La moyennisation du deuxième terme est

$$\begin{aligned}
\left\langle -C_j \omega_j \frac{r_1^2 \hat{s}_j}{r_1^8} \right\rangle &= -C_j \omega_j \hat{s}_j \left\langle \frac{1}{r_1^6} \right\rangle \\
&= -C_j \omega_j \hat{s}_j \frac{1}{a_1^6} f_1(e_1),
\end{aligned}$$

où $f_1(e_1) = \frac{1+3e_1^2+\frac{3}{8}e_1^4}{(1-e_1^2)^{9/2}}$ et où l'on a utilisé l'équation (67) de l'annexe de [7], à savoir

$$\left\langle \frac{1}{r_1^6} \right\rangle = \frac{1}{a_1^6} f_1(e_1).$$

Enfin, le troisième terme se moyenne tel que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1}{r_1^8} \right\rangle &= \left\langle \frac{\vec{G}_1}{\beta_1 r_1^8} \right\rangle \\
&= \frac{1}{a_1^8 \sqrt{1-e_1^2}} f_2(e_1) \frac{1}{\beta_1} \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \hat{k}_1 \\
&= \frac{1}{a_1^8} \sqrt{\mu_1 a_1} f_2(e_1) \hat{k}_1. \\
&= n_1 f_2(e_1) \hat{k}_1,
\end{aligned}$$

1. Les calculs détaillés des moyennisations sont disponibles dans l'annexe de [7].

où $f_2(e_1) = \frac{1+\frac{15}{2}e_1^2+\frac{45}{8}e_1^4+\frac{5}{16}e_1^6}{(1-e_1^2)^6}$ et où l'on a utilisé l'équation (68) de l'annexe de [7] :

$$\left\langle \frac{1}{r_1^8} \right\rangle = \frac{1}{a_1^8 \sqrt{1-e_1^2}} f_2(e_1).$$

Finalement, nous obtenons :

$$\dot{\vec{G}}_1 = - \sum_{j=0}^1 K_j n_1 \left\{ C_j \omega_j \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2n_1} f_4(e_1) (\hat{s}_j - \cos \theta \hat{k}_1) + \frac{(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{9/2}} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \vec{e}_1 - \frac{C_j \omega_j}{n_1} f_1(e_1) \hat{s}_j + f_2(e_1) \hat{k}_1 \right\},$$

où

$$K_j = \frac{3\Delta t_j k^2 k_{L_j} m_{1-j}^2 R_j^5}{a_1^6}.$$

De plus, $\dot{\vec{G}}_2 = 0$. Dès lors, par la conservation du moment angulaire total², nous pouvons déduire $\dot{\vec{L}}_0$ et $\dot{\vec{L}}_1$. Le terme en $j = 0$ correspond à $\dot{\vec{L}}_0$ et celui en $j = 1$ à $\dot{\vec{L}}_1$:

$$\dot{\vec{L}}_j = K_j n_1 \left\{ C_j \omega_j \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2n_1} f_4(e_1) (\hat{s}_j - \cos \theta \hat{k}_1) + \frac{(6+e_1^2)}{4(1-e_1^2)^{9/2}} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \vec{e}_1 - \frac{C_j \omega_j}{n_1} f_1(e_1) \hat{s}_j + f_2(e_1) \hat{k}_1 \right\}.$$

Pour calculer $\dot{\vec{e}}_1$, nous procédons de la même manière. On part de la force \vec{F}_1 (E.1) et par la formule³

$$\dot{\vec{e}}_1 = \frac{1}{\beta_1 \mu_1} \left(\vec{F}_1 \times \frac{\vec{G}_1}{\beta_1} + \dot{\vec{r}}_1 \times \dot{\vec{G}}_1 \right), \quad (\text{E.2})$$

Nous obtenons après moyennisation

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1 = & - \sum_{j=0}^1 \frac{K_j}{\beta_1 a_1^2} \left\{ f_4(e_1) \frac{\omega_j}{2n_1} (\vec{e}_1 \cdot \hat{s}_j) \hat{k}_1 - \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) \cos \theta_j \frac{\omega_j}{n_1} - 9 f_5(e_1) \right) \vec{e}_1 \right\} \\ & + \sum_{j=0}^1 \frac{15}{2} k_{L_j} n_1 \frac{m_{(1-j)}}{m_j} \left(\frac{R_j}{a_1} \right)^5 f_4(e_1) \hat{k}_1 \times \vec{e}_1. \end{aligned}$$

2. Pour rappel : $\dot{\vec{L}}_0 + \dot{\vec{L}}_1 = -\dot{\vec{G}}_1 - \dot{\vec{G}}_2$

3. Cette formule provient de la définition du vecteur de Laplace-Runge-Lenz :

$$\vec{e}_1 = \frac{\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{G}_1}{\beta_1 \mu_1} - \frac{\vec{r}_1}{r_1},$$

que l'on dérive pour obtenir l'équation (E.2).

Annexe F

Equations du mouvement en éléments orbitaux

Nous souhaitons réécrire le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{L}}_j = 0, \\ \dot{\vec{G}}_1 = 5\gamma(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \vec{e}_1, \\ \dot{\vec{e}}_1 = \gamma \frac{(1 - e_1^2)}{G_1} \left(5(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2) \hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{k}}_1 \right) + \frac{K_0}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9 f_5(e_1) \right) \vec{e}_1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(F.1)} \\ \text{(F.2)} \\ \text{(F.3)} \end{array}$$

en un système tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1}{e_1}, \\ \frac{d(\cos i)}{dt} = \frac{\dot{\vec{G}}_1}{G_1} (\hat{\vec{k}}_2 - \hat{\vec{k}}_1 \cos i) + \frac{\dot{\vec{G}}_2}{G_2} (\hat{\vec{k}}_1 - \hat{\vec{k}}_2 \cos i), \\ \dot{\varpi}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot (\hat{\vec{k}}_1 \times \vec{e}_1)}{e_1^2}, \\ \frac{\dot{a}_1}{a_1} = \frac{2\dot{e}_1 e_1}{(1 - e_1^2)} + \frac{2\vec{G}_1 \cdot \dot{\vec{G}}_1}{G_1^2}. \end{array} \right.$$

Nous expliquons ces formules et les développons par rapport à nos équations. Nous suivons les explications fournies par [7]. Pour obtenir les expressions désirées, nous nous servons de la base utilisée précédemment pour y développer tous les vecteurs. Pour rappel, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\vec{k}}_1 &= R_z(\Omega_1) R_x(i) \hat{\vec{k}}_2, \\ \vec{e}_1 &= R_z(\Omega_1) R_x(i) R_z(\varpi_1) R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{\vec{k}}_2, \\ \hat{\vec{s}}_0 &= R_z(\psi_0) R_x(\epsilon_0) \hat{\vec{k}}_2 = R_z(\phi_0) R_x(\theta_0) \hat{\vec{k}}_1, \\ \hat{\vec{s}}_1 &= R_z(\psi_1) R_x(\epsilon_1) \hat{\vec{k}}_2 = R_z(\phi_1) R_x(\theta_1) \hat{\vec{k}}_1, \end{aligned}$$

où

$$\hat{k}_2 = (0, 0, 1).$$

Tous les calculs intermédiaires dont nous aurons besoin plus tard sont repris ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= (0, -\sin i, \cos i), & \hat{e}_1 &= (\sin \varpi_1, -\cos i \cos \varpi_1, -\sin i \cos \varpi_1), \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{k}_2 &= -\sin i \cos \varpi_1, & \hat{k}_2 \times \hat{k}_1 &= (-\sin i, 0, 0), \\ \hat{k}_2 \times \hat{e}_1 &= (\cos i \cos \varpi_1, \sin \varpi_1, 0), & (\hat{k}_2 \times \hat{e}_1) \cdot \hat{k}_1 &= -\sin i \sin \varpi_1, \\ \hat{e}_1 \cdot (\hat{k}_1 \times \hat{e}_1) &= 0, & (\hat{k}_2 \times \hat{k}_1) \cdot (\hat{k}_1 \times \hat{e}_1) &= -\cos \varpi_1 \sin i, \\ \hat{k}_1 \times \hat{e}_1 &= (\cos \varpi_1, \cos i \sin \varpi_1, \sin i \sin \varpi_1), & (\hat{k}_2 \times \hat{k}_1) \cdot \hat{e}_1 &= -\sin i \sin \varpi_1. \end{aligned}$$

Tout d'abord, calculons l'expression \dot{e}_1 . Elle est donnée à l'équation (43) de [7]. Il s'agit simplement de la dérivation de la norme du vecteur excentricité. En effet, pour obtenir cette formule, il suffit d'écrire

$$e_1^2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1.$$

Dès lors, nous avons $2e_1\dot{e}_1 = 2\vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_1$, et

$$\dot{e}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1}{e_1}.$$

Nous effectuons maintenant $(\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1)$ grâce aux calculs intermédiaires, $\hat{e}_1 \cdot \hat{k}_2$, $\hat{k}_2 \times \hat{k}_1$ et $(\hat{k}_2 \times \hat{k}_1) \cdot \hat{e}_1$. Nous trouvons

$$\dot{e}_1 = \frac{5}{2} \frac{\gamma \sqrt{(1-e_1^2)} e_1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \sin^2 i \sin 2\varpi_1 + \frac{K_0 e_1}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9 f_5(e_1) \right).$$

Ensuite, calculons la variation de l'inclinaison. Celle-ci est donnée par

$$\frac{d(\cos i)}{dt} = \frac{\dot{\vec{G}}_1}{G_1} \left(\hat{k}_2 - \hat{k}_1 \cos i \right) + \frac{\dot{\vec{G}}_2}{G_2} \left(\hat{k}_1 - \hat{k}_2 \cos i \right).$$

Cette formule est donnée à l'équation (44) dans [7]. Démontrons cette formule. Nous savons que $\cos i = \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2$, et $\hat{k}_j = \frac{\vec{G}_j}{G_j}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos i)}{dt} &= \frac{d\hat{k}_1}{dt} \cdot \hat{k}_2 + \frac{d\hat{k}_2}{dt} \cdot \hat{k}_1 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{G}_1}{G_1} \right) \cdot \hat{k}_2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{G}_2}{G_2} \right) \cdot \hat{k}_1 \\ &= \frac{\dot{\vec{G}}_1 G_1 - \vec{G}_1 \dot{G}_1}{G_1^2} \cdot \hat{k}_2 + \frac{\dot{\vec{G}}_2 G_2 - \vec{G}_2 \dot{G}_2}{G_2^2} \cdot \hat{k}_1 \\ &= \frac{\dot{\vec{G}}_1}{G_1} \left(\hat{k}_2 - \hat{k}_1 \cos i \right) + \frac{\dot{\vec{G}}_2}{G_2} \left(\hat{k}_1 - \hat{k}_2 \cos i \right), \end{aligned} \tag{F.4}$$

où nous nous sommes servis de la dérivée de la norme comme pour le calcul de e_1 :

$$\frac{dG_j}{dt} = \frac{\vec{G}_j \cdot \dot{\vec{G}}_j}{G_j}.$$

Nous limitons le calcul au premier terme de (F.4), car $a_2 \gg a_1$ et donc $G_2 \gg G_1$. Ensuite, nous remplaçons $\dot{\vec{G}}_1$ par son expression (F.2) et on effectue $(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \hat{k}_1 \cos i)$. Notons que $(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \hat{k}_2)$ est nul car $(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \hat{k}_2) = (\hat{k}_2 \times \vec{e}_1) \cdot \hat{k}_2 = 0$. Nous effectuons maintenant les produits scalaires et vectoriels nécessaires, à savoir $(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2)$, $(\hat{k}_2 \times \vec{e}_1)$, et $(\hat{k}_2 \times \vec{e}_1) \cdot \hat{k}_1$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos i)}{dt} &= \frac{5\gamma e_1^2 \cos i \sin^2 i \sin 2\varpi_1}{2G_1} \\ &= \frac{5\gamma e_1^2 \cos i \sin^2 i \sin 2\varpi_1}{2\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant développer $\dot{\varpi}_1$. Pour obtenir son expression, nous partons de

$$\dot{\vec{e}}_1 = \dot{\varpi}_1 \hat{k}_1 \times \vec{e}_1,$$

qui représente une précession du vecteur \vec{e}_1 d'un angle $\dot{\varpi}_1$ autour de \hat{k}_1 . Si nous multiplions chaque membre de cette égalité par $\hat{k}_1 \times \vec{e}_1$, nous avons immédiatement l'expression

$$\dot{\varpi}_1 = \frac{\dot{\vec{e}}_1 \cdot (\hat{k}_1 \times \vec{e}_1)}{e_1^2}.$$

Nous devons maintenant remplacer $\dot{\vec{e}}_1$, et \hat{k}_1 par leur expression, pour obtenir la formulation de $\dot{\varpi}_1$ dans les bonnes variables. Pour cela, nous avons besoin des calculs intermédiaires $(\vec{e}_1 \cdot \hat{k}_2)$, $\hat{e}_1 \cdot (\hat{k}_1 \times \hat{e}_1)$ et $(\hat{k}_2 \times \hat{k}_1) \cdot (\hat{k}_1 \times \hat{e}_1)$. Nous obtenons

$$\dot{\varpi}_1 = 5\gamma(1 - e_1^2) \sin^2 i \cos^2 \varpi_1,$$

car le terme de marées dissipatives s'annule suite au produit $\hat{e}_1 \cdot (\hat{k}_1 \times \hat{e}_1)$.

La dernière équation à obtenir est la variation du demi-grand axe, \dot{a}_1 . Repartons de $a_1 = \frac{1}{\beta_1^2 \mu_1} \frac{G_1^2}{(1 - e_1^2)}$ et dérivons-le :

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{1}{\beta_1^2 \mu_1} \left(\frac{2G_1 \dot{G}_1 (1 - e_1^2) + 2G_1^2 e_1 \dot{e}_1}{(1 - e_1^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_1^2 \mu_1} \left(\frac{2(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \vec{G}_1)(1 - e_1^2) + 2G_1^2 e_1 \dot{e}_1}{(1 - e_1^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_1^2 \mu_1} \frac{2(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \vec{G}_1)}{(1 - e_1^2)} + \frac{1}{\beta_1^2 \mu_1} \frac{2G_1^2 e_1 \dot{e}_1}{(1 - e_1^2)^2} \\ &= \frac{2a_1(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \vec{G}_1)}{G_1^2} + \frac{2a_1 e_1 \dot{e}_1}{(1 - e_1^2)}, \end{aligned}$$

ce qui correspondant à l'équation (56) dans [7]. Alors que le calcul du terme $\frac{2a_1 e_1 \dot{e}_1}{(1-e_1^2)}$ est immédiat, le terme $\frac{2a_1(\dot{\vec{G}}_1 \cdot \vec{G}_1)}{G_1^2}$ doit être calculé à l'aide des calculs intermédiaires $\hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{e}}_1$, $(\vec{e}_1 \cdot \hat{\vec{k}}_2)$ et $(\hat{\vec{k}}_2 \times \hat{\vec{e}}_1) \cdot \hat{\vec{k}}_1$. Nous obtenons l'expression finale de \dot{a}_1 :

$$\dot{a}_1 = \frac{10\gamma e_1^2 \sin^2 i \sin 2\varpi_1 \sqrt{a_1}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1(1-e_1^2)}} + \frac{2K_j e_1^2}{\beta_1 a_1 (1-e_1^2)} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right).$$

Au final, le système se réécrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \frac{5}{2} \frac{\gamma \sqrt{(1-e_1^2)} e_1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \sin^2 i \sin 2\varpi_1 + \frac{K_j e_1}{\beta_1 a_1^2} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right), \\ \frac{d(\cos i)}{dt} = \frac{5\gamma e_1^2 \cos i \sin^2 i \sin 2\varpi_1}{2\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1} (1-e_1^2)}, \\ \dot{\varpi}_1 = 5\gamma(1-e_1^2) \sin^2 i \cos^2 \varpi_1, \\ \dot{a}_1 = \frac{10\gamma e_1^2 \sin^2 i \sin 2\varpi_1 \sqrt{a_1}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1(1-e_1^2)}} + \frac{2K_j e_1^2}{\beta_1 a_1 (1-e_1^2)} \left(\frac{11}{2} f_4(e_1) - 9f_5(e_1) \right). \end{array} \right.$$

Annexe G

Codes

Les programmes utilisés pour tracer les figures principales du Chapitre 5 sont repris ci-dessous. La section G.1 reprend le programme permettant d'obtenir les valeurs des composantes hamiltoniennes. La section G.2 rperoduit le programme permettant de tracer l'évolution des différents systèmes.

G.1 Composantes hamiltoniennes

G.1.1 Programme principal

```
program Programme_hamiltonien

USE parametres

IMPLICIT NONE

! declaration des variables

REAL(KIND(1.0d0)) :: H, G1, G2
REAL(KIND(1.0d0)) :: var_i,n
INTEGER(KIND=KIND(1.D0)) :: j
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: mu1,beta1,mu2,beta2
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: a_2,a_1
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: L_1
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: L_2
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: H_octu,H_GR,H_maree,Aa,B,cosphi,alpha

open(unit=18,file='hamiltonien.txt',status='replace')

DO j=10,1000
    a_1=j/1000.d0
```

```

a_2=demi_grand_axe_2
beta1=(1.d0/m_0+1.d0/m_1)**(-1)
beta2=(1.d0/m_0+1.d0/m_2)**(-1)
mu1=k**2*(m_0+m_1)
mu2=k**2*(m_0+m_2)
L_1=beta1*sqrt(mu1*a_1)
L_2=beta2*sqrt(mu2*a_2)
G1=L_1*sqrt(1.0d0-excentricite1**2)
G2=L_2*sqrt(1.0d0-excentricite2**2)
cosphi=-cos(argument_periastre_1)*cos(argument_periastre_2)-
        cos(i)*sin(argument_periastre_1)*sin(argument_periastre_2)
alpha=a_1/a_2
B=7.d0-5.d0*G1**2/(L_1)**2-7*(1.d0-G1**2/(L_1)**2)*cos(2*
    argument_periastre_1)
Aa=7.d0-3.d0*G1**2/(L_1)**2-5.d0/2.d0*(1-cos(i)**2)*B
! Hamiltonien otupole
H_octu=-alpha**2*(k**2*m_1*m_2*(L_2)**3)/(16*a_2*(G2)**3)
        *((2.d0+3.d0*(1-G1**2/L_1**2))*(3.d0*(cos(i))**2-1.d0)+15.
        d0*(1-G1**2/L_1**2)*(1.d0-(cos(i))**2)*cos(2.d0*
        argument_periastre_1))
H_octu=H_octu+alpha**3*(15.d0*k**2*m_1*m_2*(L_2)**5)/(64.d0*
        a_2*(G2)**5)*sqrt(1.d0-G1**2/L_1**2)*sqrt(1.d0-G2**2/L_2
        **2)*(Aa*cosphi+10.d0*G1**2/(L_1)**2*cos(i)*(1.d0-(cos(i))
        **2)*sin(argument_periastre_1)*sin(argument_periastre_2))
! Hamiltonien GR
H_GR=-(3.d0*(mu1)**4*(beta1)**5)/((Vitesse_lumiere**2)*L_1
        **3*G1)
! Hamiltonien maree
H_maree=-(beta1*k_love*(1.d0+m_1/m_0)*(R_primaire**5)*(
        vitesse_rotation**2))/(6.d0*(a_1**3)*((1.d0-(excentricite1
        **2))*(3.d0/2.d0)))-(beta1*k_love*(R_primaire**5)*(k**2)*
        m_1*(1.d0+m_1/m_0)*(3.d0/8.d0*excentricite1**4+3.d0*
        excentricite1**2+1.d0))/((a_1)**6*((1.d0-excentricite1**2)
        *(9.d0/2.d0)))
write (18,'(6e25.16)') a_1,H_octu,H_GR,H_maree

```

END DO

close(18)

end program Programme_hamiltonien

G.1.2 Module paramètres

MODULE parametres

! definition de pi

```

REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: pi=2.d0*atan2(1.d0,0.d0)
! definition de la constante gravitationnelle
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: k=sqrt(4.d0*pi**2.d0)

! Vitesse de la lumiere. Unites= UA/annees
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: Vitesse_lumiere
    =6.3284857971d0*1.d4

! Nombre de Love
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: k_love=0.02d0

! pas d'integration
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: h_pas=1.d0
! nombre utilisé pour déterminer les "points" de l'intégration
    que nous gardons (par exemple, nous intégrons
! avec un pas d'un an, mais ne retenons que de 100 en 100)
INTEGER(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: h_reel= 10.d0

! temps initial et final d'integration
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: t_init=0.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: t_final=1.5d0*1.d6

! Masses de l'etoile primaire, de l'etoile secondaire et de l'
    exoplanete (Unites: sans unite, par raport à la masse
    solaire)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_0=1.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_1=3.0032*1.d-6
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_2=0.9545d0*1.d-3

! Excentricite excentricite1=0.01671022d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: excentricite1=0.5d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: excentricite2=0.01d0

! Arguments du periastre g (Unites: rad)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: argument_periastre_1=0.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: argument_periastre_2=0.d0

! Demi-grands axes
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: demi_grand_axe_1=0.5d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: demi_grand_axe_2=5.d0

! Inclinaison mutuelle. Unites=rad. i=i1+i2
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: i=0.d0

! Vitesse de rotation de l'etoile primaire, ici, période de
    rotation = 30 jours. Unites=rad/annees (a entrer en rad/s)

```

```
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: Vitesse_rotation
    =31557600.d0*2.6658d0*1.d-6
```

```
! Rayon etoile primaire ! Essai en UA
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: R_primaire=1.d0*4.65476*1.
    d-3
```

```
END MODULE parametres
```

G.2 Évolutions des systèmes

G.2.1 Programme principal

```
! Programme principal
program Binaire

USE parametres
USE integrateurRK4

IMPLICIT NONE

! declaration des variables
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(4) :: x_temp
REAL(KIND(1.0d0)) :: t
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(:), allocatable :: x ! Vecteur
    contenant e_1, e_2, g_1 et g_2
REAL(KIND(1.0d0)) :: H, G1, G2
REAL(KIND(1.0d0)) :: var_i,n
INTEGER(KIND=KIND(1.D0)) :: j, Correction
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: a_1,beta1,beta2,mu1,mu2
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: a_2
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: L_1
REAL(KIND=KIND(1.D0)) :: L_2
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(:), allocatable :: var

!Allocation du vecteur x et de var
allocate(x(4))
allocate(var(5))

write(*,*) 'Bienvenue!'
write(*,*) 'Si_vous_ne_voulez_pas_tenir_compte_des_corrections,_'
    tapez_1.'
write(*,*) 'Si_vous_désirez_tenir_compte_des_corrections_post-'
    newtonnienne_et_des_corrections_de_marée,_'tapez_2.'
read(*,*) Correction

!ouverture du fichier resultat
```

```

IF (Correction==1) THEN
open( unit=17,file='resultats_sans_correction.txt',action='write'
)
ELSE
open( unit=17,file='resultats_avec_corrections.txt',action='write
')
ENDIF

! Recuperation des excentricites e_1 et e_2 et des arguments du
! periastre g_1 et g_2
! write(*,*) 'Entrez le vecteur initial e_1, e_2, g_1 et g_2,
! avec les angles en radians '
! read(*,*) x(1), x(2), x(3), x(4)

write(*,*) 'Calcul_en_cours '
x(1)=excentricite1
x(2)=excentricite2
x(3)=argument_periastre_1
x(4)=argument_periastre_2

beta1=(1/m_0+1/m_1)**(-1)
beta2=(1/m_0+1/m_2)**(-1)
mul=k**2*(m_0+m_1)
mu2=k**2*(m_0+m_2)
a_1=demi_grand_axe_1
a_2=demi_grand_axe_2
L_1=beta1*sqrt(mul*a_1)
L_2=beta2*sqrt(mu2*a_2)
G1=L_1*sqrt(1.0d0-x(1)**2)
G2=L_2*sqrt(1.0d0-x(2)**2)
H=sqrt(2.0d0*G1*G2*cos(i)+G1**2+G2**2)

! Remplissage du vecteur var
var(1)=a_1
var(2)=a_2
var(3)=L_1
var(4)=L_2
var(5)=H

n=t_final/h_pas ! defintion de n

! Ecriture dans le fichier de la premiere ligne
write(17,'(6e25.16)') t_init, x(1), x(2), MODULO(x(3),2.0d0*pi)
*180.0d0/pi, MODULO(x(4),2.0d0*pi)*180.0d0/pi, MODULO(i,2.0d0*pi)
*180.0d0/pi

```



```

! *****
! Boucle d'integration
! *****
DO j=0,n-1
  t=t_init+j*h_pas
  call RK4(x,t,var,x_temp,Correction)
  x=x_temp
  var_i=(var(5)**2-(var(3)*sqrt(1.d0-x(1)**2))**2-(var(4)*sqrt(1.
    d0-x(2)**2))**2)/(2*var(3)*sqrt(1.d0-x(1)**2)*var(4)*sqrt(1.
    d0-x(2)**2))
  ! Permet de ne pas retenir toutes les lignes d'integration mais
  ! seulement tous les quelques temps
  if (MODULO(j+1,h_reel)==0) write (17,'(6e25.16)') t+h_pas,x(1),x
    (2), MODULO(x(3),2.d0*pi)*180.d0/pi, MODULO(x(4),2.d0*pi)
    *180.d0/pi, MODULO(acos(var_i),2.d0*pi)*180.d0/pi
END DO
! *****

deallocate(x)
deallocate(var)
close(17)

```

end program Binaire

G.2.2 Modules

1. Intégrateur

```
MODULE integrateurRK4
```

```
CONTAINS
```

```
SUBROUTINE equations_mouvement_sans_correction(x,t,var,k_out
)
```

```
USE parametres
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
! IN
```

```
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(4), INTENT(IN) :: x
```

```
REAL(KIND(1.0d0)), INTENT(IN) :: t
```

```
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(5), INTENT(IN) :: var
```

```
! OUT
```

```
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(4), INTENT(OUT) :: k_out
```

```
! INTERN
```

```
REAL(KIND(1.0d0)) :: t128,t129,t130,t131,t132,t133,t134,t135
,t136,t137,t138,t139,t140,t141,t142,t143,t144,t145,t146,
```

```

t147,t148,t149,t150,t151,t152,t157,t158,t153,t170,t154,
t155,t156,t159,t160,t161,t162,t163,t164,t165,t166,t167,
t168,t169,t171,t172,t226,t227,t228,t229,t230,t231,t232,
t233,t234,t235,t236,t237,t238,t239,t240,t247,t248,t241,
t242,t243,t244,t245,t246,t249,t250,t251,t266,t252,t253,
t254,t255,t256,t270,t257,t258,t259,t260,t261,t262,t263,
t272,t264,t265,t267,t268,t269,t271,t273,t274,t275,t276,
t277,t278,t308,t309,t310,t311,t312,t313,t314,t315,t316,
t317,t318,t319,t320,t321,t322,t323,t324,t325,t332,t333,
t334,t326,t327,t328,t329,t330,t331,t335,t336,t354,t355,
t356,t357,t358,t359,t360,t361,t362,t363,t364,t365,t366,
t367,t368,t369,t370

REAL(KIND(1.0d0)) :: e_1,e_2,g_1,g_2
REAL(KIND(1.0d0)) :: H,a_1,a_2,L1,L2,G1,G2
REAL(KIND(1.0d0)) :: de1,de2,dg1,dg2

! utilisation des variables contenues dans x
e_1=x(1)
e_2=x(2)
g_1=x(3)
g_2=x(4)

! On recupere les parametres contenus dans var pour plus de
  facilite
a_1=var(1)
a_2=var(2)
L1=var(3)
L2=var(4)
H=var(5)

! Redefinition de G1 et G2, definition de theta , cosphi
G1=L1*sqrt(1.D0-(e_1**2))
G2=L2*sqrt(1.D0-(e_2**2))

!de1
t308 = 1.0D0/L1**2
t309 = L2**2
t310 = t309**2
t311 = a_1**2
t312 = G1**2
t313 = L1**2
t314 = t312-t313
t315 = G2**2
t316 = g_1*2.0D0

```

```

t317 = cos(t316)
t318 = H**2
t319 = 1.0D0/G1
t320 = cos(g_1)
t321 = sin(g_2)
t322 = t312+t315-t318
t323 = t312**2
t324 = t315**2
t325 = t318**2
t332 = t312*t315*2.0D0
t333 = t312*t318*2.0D0
t334 = t315*t318*2.0D0
t326 = t323+t324+t325-t332-t333-t334
t327 = 1.0D0/G1**2
t328 = 1.0D0/G2**2
t329 = cos(g_2)
t330 = 1.0D0/G2
t331 = sin(g_1)
t335 = 1.0D0/G2**5
t336 = sin(t316)

de1 = -(-G1*t308*(k**2*L2*a_1*1.0D0/a_2**4*m_1*m_2*t310*t311
*t335*sqrt(-t308*t314))*sqrt(1.0D0/L2**2*(t309-t315)))*(-(
t329*t331+t319*t320*t321*t322*t330*(1.0D0/2.0D0))*(t308*
t312*3.0D0+t308*t326*t327*t328*(t312*5.0D0-t313*7.0D0-
t312*t317*7.0D0+t313*t317*7.0D0)*(5.0D0/8.0D0)-7.0D0)+
t308*t314*t326*t327*t328*t336*(t320*t329-t319*t321*t322*
t330*t331*(1.0D0/2.0D0))*(3.5D1/4.0D0)+1.0D0/G2**3*t308*
t319*t320*t321*t322*t326*(5.0D0/4.0D0))*(1.5D1/6.4D1)+k
**2*L2*1.0D0/a_2**3*m_1*m_2*t308*t309*t311*t314*t326*t327
*t335*t336*(1.5D1/3.2D1))*1.0D0/sqrt(-t308*t314))

!de2
t354 = L2**2
t355 = a_1**2
t356 = G1**2
t357 = 1.0D0/L1**2
t358 = L1**2
t359 = g_1*2.0D0
t360 = cos(t359)
t361 = G2**2
t362 = H**2
t363 = 1.0D0/G1
t364 = cos(g_2)
t365 = sin(g_1)
t366 = t356+t361-t362

```

```

t367 = t356**2
t368 = t361**2
t369 = t362**2
t370 = t367+t368+t369-t356*t361*2.0D0-t356*t362*2.0D0-t361*
      t362*2.0D0

de2=-( k**2*1.0D0/G2**4*L2*a_1*1.0D0/a_2**4*m_1*m_2*t354*
      t355*sqrt(-t357*(t356-t358))*((cos(g_1)*sin(g_2)+(t363*
      t364*t365*t366*(1.0D0/2.0D0))/G2)*(t356*t357*3.0D0+1.0D0/
      G1**2*1.0D0/G2**2*t357*t370*(t356*5.0D0-t358*7.0D0-t356*
      t360*7.0D0+t358*t360*7.0D0)*(5.0D0/8.0D0)-7.0D0)-1.0D0/G2
      **3*t357*t363*t364*t365*t366*t370*(5.0D0/4.0D0))*(1.5D1
      /6.4D1))

!dg1
t128 = L2**2
t129 = G1**2
t130 = t129**2
t131 = G2**2
t132 = L1**2
t133 = H**2
t134 = g_1*2.0D0
t135 = cos(t134)
t136 = t131**2
t137 = t133**2
t138 = 1.0D0/G2**5
t139 = t128**2
t140 = a_1**2
t141 = 1.0D0/L1**2
t142 = 1.0D0/G1
t143 = 1.0D0/G1**3
t144 = 1.0D0/G2**2
t145 = sin(g_1)
t146 = sin(g_2)
t147 = t131*t133*2.0D0
t148 = 1.0D0/G2
t149 = 1.0D0/G1**2
t150 = t132*t135*7.0D0
t151 = t129*5.0D0
t152 = t132*7.0D0
t157 = t129*t131*2.0D0
t158 = t129*t133*2.0D0
t153 = t130+t136+t137-t147-t157-t158
t170 = t129*t135*7.0D0
t154 = t150+t151-t152-t170

```

```

t155 = 1.0D0/G2**3
t156 = t129+t131-t133
t159 = t130-t136-t137+t147
t160 = 1.0D0/a_2**4
t161 = t129-t132
t162 = 1.0D0/L2**2
t163 = t162*(t128-t131)
t164 = sqrt(t163)
t165 = cos(g_1)
t166 = cos(g_2)
t167 = t165*t166
t168 = t167-t142*t145*t146*t148*t156*(1.0D0/2.0D0)
t169 = t129*t141*3.0D0
t171 = t141*t144*t149*t153*t154*(5.0D0/8.0D0)
t172 = t169+t171-7.0D0

dg1 = -(k**2*L2*1.0D0/a_2**3*m_1*m_2*t128*t138*t140*t141*
t143*(t129*t130*6.0D0+t130*t131*2.0D0-t130*t132*5.0D0-
t130*t133*6.0D0+t132*t136*5.0D0+t132*t137*5.0D0-t129*t130
*t135*1.0D1+t130*t131*t135*1.0D1-t131*t132*t133*1.0D1+
t130*t132*t135*5.0D0+t130*t133*t135*1.0D1-t132*t135*t136
*5.0D0-t132*t135*t137*5.0D0+t131*t132*t133*t135*1.0D1)
*(-3.0D0/3.2D1)-k**2*L2*a_1*m_1*m_2*t138*t139*t140*t160*
t164*sqrt(-t141*t161)*(t168*(G1*t141*6.0D0-t141*t142*t144
*t153*(t135*7.0D0-5.0D0)*(5.0D0/4.0D0)+t141*t143*t144*
t154*t159*(5.0D0/4.0D0))+t141*t145*t146*t153*t155*(5.0D0
/2.0D0)-t145*t146*t148*t149*t172*(t129-t131+t133)*(1.0D0
/2.0D0)+t141*t145*t146*t149*t153*t155*t156*(5.0D0/4.0D0)+
t141*t145*t146*t149*t155*t156*t159*(5.0D0/2.0D0))*(1.5D1
/6.4D1)+k**2*G1*L2*a_1*m_1*m_2*t138*t139*t140*t141*t160*
t164*(t168*t172+t141*t142*t145*t146*t153*t155*t156*(5.0D0
/4.0D0))*1.0D0/sqrt(-t141*t161)*(1.5D1/6.4D1))

!dg2

t226 = L2**2
t227 = G1**2
t228 = G2**2
t229 = H**2
t230 = 1.0D0/G1**2
t231 = 1.0D0/G2**2
t232 = 1.0D0/L1**2
t233 = L1**2
t234 = t227**2
t235 = t228**2

```

```

t236 = t229**2
t237 = t227*t228*2.0D0
t238 = t226**2
t239 = a_1**2
t240 = t227-t233
t247 = t227*t229*2.0D0
t248 = t228*t229*2.0D0
t241 = t234+t235+t236-t237-t247-t248
t242 = 1.0D0/G1
t243 = sin(g_1)
t244 = sin(g_2)
t245 = g_1*2.0D0
t246 = cos(t245)
t249 = t233*t246*7.0D0
t250 = t227*5.0D0
t251 = t233*7.0D0
t266 = t227*t246*7.0D0
t252 = t249+t250-t251-t266
t253 = 1.0D0/G2**4
t254 = t227+t228-t229
t255 = t234-t235+t236-t247
t256 = 1.0D0/a_2**4
t270 = t232*t240
t257 = sqrt(-t270)
t258 = 1.0D0/L2**2
t259 = t258*(t226-t228)
t260 = cos(g_1)
t261 = cos(g_2)
t262 = t260*t261
t263 = 1.0D0/G2
t272 = t242*t243*t244*t254*t263*(1.0D0/2.0D0)
t264 = t262-t272
t265 = t227*t232*3.0D0
t267 = t230*t231*t232*t241*t252*(5.0D0/8.0D0)
t268 = t265+t267-7.0D0
t269 = 1.0D0/G2**3
t271 = sqrt(t259)
t273 = t264*t268
t274 = t232*t241*t242*t243*t244*t254*t269*(5.0D0/4.0D0)
t275 = 1.0D0/G2**6
t276 = 1.0D0/a_2**3
t277 = t227*3.0D0
t278 = t233*5.0D0

dg2 = -(k**2*L2*m_1*m_2*t226*t239*t253*t276*(t230*t231*t232
*(t277-t278))*(t234*3.0D0+t235*3.0D0+t236*3.0D0+t237-t227*

```

```

t229*6.0D0-t228*t229*6.0D0)*(1.0D0/4.0D0)-t230*t231*t232*
t240*t241*t246*(1.5D1/4.0D0))*(3.0D0/1.6D1)+k**2*L2*a_1*
m_1*m_2*t238*t239*t256*t257*t271*t275*(t273+t274)*(7.5D1
/6.4D1)+k**2*L2*m_1*m_2*t226*t230*t232*t239*t255*t275*
t276*(t277-t278-t227*t246*5.0D0+t233*t246*5.0D0)*(3.0D0
/3.2D1)+k**2*1.0D0/G2**5*L2*a_1*m_1*m_2*t238*t239*t256*
t257*t271*(t231*t232*t241*t242*t243*t244*(-5.0D0/2.0D0)+
t230*t232*t252*t255*t264*t269*(5.0D0/4.0D0)+t231*t242*
t243*t244*t268*(-t227+t228+t229)*(1.0D0/2.0D0)+t232*t241*
t242*t243*t244*t253*t254*(5.0D0/4.0D0)+t232*t242*t243*
t244*t253*t254*t255*(5.0D0/2.0D0))*(1.5D1/6.4D1)+k**2*L2*
a_1*m_1*m_2*t226*t239*t253*t256*t257*1.0D0/sqrt(t259)*(
t273+t274)*(1.5D1/6.4D1))

! OUT
k_out(1)=de1
k_out(2)=de2
k_out(3)=dg1
k_out(4)=dg2

END SUBROUTINE equations_mouvement_sans_correction

SUBROUTINE equations_mouvement_avec_correction(x,t,var,k_out
)

USE parametres
IMPLICIT NONE
! IN
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(4), INTENT(IN) :: x
REAL(KIND(1.0d0)), INTENT(IN) :: t
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(5), INTENT(IN) :: var
! OUT
REAL(KIND(1.0d0)), dimension(4), INTENT(OUT) :: k_out
! INTERN
REAL(KIND(1.0d0)) :: t128,t129,t130,t131,t132,t133,t134,t135
,t136,t137,t138,t139,t140,t141,t142,t143,t144,t145,t146,
t147,t148,t149,t150,t151,t152,t157,t158,t153,t170,t154,
t155,t156,t159,t160,t161,t162,t163,t164,t165,t166,t167,
t168,t169,t171,t172,t226,t227,t228,t229,t230,t231,t232,
t233,t234,t235,t236,t237,t238,t239,t240,t247,t248,t241,
t242,t243,t244,t245,t246,t249,t250,t251,t266,t252,t253,
t254,t255,t256,t270,t257,t258,t259,t260,t261,t262,t263,

```

```

t272 , t264 , t265 , t267 , t268 , t269 , t271 , t273 , t274 , t275 , t276 ,
t277 , t278 , t308 , t309 , t310 , t311 , t312 , t313 , t314 , t315 , t316 ,
t317 , t318 , t319 , t320 , t321 , t322 , t323 , t324 , t325 , t332 , t333 ,
t334 , t326 , t327 , t328 , t329 , t330 , t331 , t335 , t336 , t354 , t355 ,
t356 , t357 , t358 , t359 , t360 , t361 , t362 , t363 , t364 , t365 , t366 ,
t367 , t368 , t369 , t370
REAL(KIND(1.0d0)) :: e_1 , e_2 , g_1 , g_2
REAL(KIND(1.0d0)) :: H , a_1 , a_2 , L1 , L2 , G1 , G2
!REAL(KIND(1.0d0)) :: theta , cosphi
!REAL(KIND(1.0d0)) :: C2 , C3 , A , B
REAL(KIND(1.0d0)) :: de1 , de2 , dg1 , dg2

! utilisation des variables contenues dans x
e_1=x(1)
e_2=x(2)
g_1=x(3)
g_2=x(4)

! On recupere les parametres contenus dans var pour plus de
  facilite
a_1=var(1)
a_2=var(2)
L1=var(3)
L2=var(4)
H=var(5)

! Redefinition de G1 et G2, definition de theta , cosphi
G1=L1*sqrt(1.D0-(e_1**2))
G2=L2*sqrt(1.D0-(e_2**2))

!de1
t308 = 1.0D0/L1**2
t309 = L2**2
t310 = t309**2
t311 = a_1**2
t312 = G1**2
t313 = L1**2
t314 = t312-t313
t315 = G2**2
t316 = g_1*2.0D0
t317 = cos(t316)
t318 = H**2
t319 = 1.0D0/G1
t320 = cos(g_1)

```



```

t321 = sin(g_2)
t322 = t312+t315-t318
t323 = t312**2
t324 = t315**2
t325 = t318**2
t332 = t312*t315*2.0D0
t333 = t312*t318*2.0D0
t334 = t315*t318*2.0D0
t326 = t323+t324+t325-t332-t333-t334
t327 = 1.0D0/G1**2
t328 = 1.0D0/G2**2
t329 = cos(g_2)
t330 = 1.0D0/G2
t331 = sin(g_1)
t335 = 1.0D0/G2**5
t336 = sin(t316)

de1 = -(-G1*t308*(k**2*L2*a_1*1.0D0/a_2**4*m_1*m_2*t310*t311
*t335*sqrt(-t308*t314)*sqrt(1.0D0/L2**2*(t309-t315)))*(-(
t329*t331+t319*t320*t321*t322*t330*(1.0D0/2.0D0))*(t308*
t312*3.0D0+t308*t326*t327*t328*(t312*5.0D0-t313*7.0D0-
t312*t317*7.0D0+t313*t317*7.0D0))*(5.0D0/8.0D0)-7.0D0)+
t308*t314*t326*t327*t328*t336*(t320*t329-t319*t321*t322*
t330*t331*(1.0D0/2.0D0))*(3.5D1/4.0D0)+1.0D0/G2**3*t308*
t319*t320*t321*t322*t326*(5.0D0/4.0D0))*(1.5D1/6.4D1)+k
**2*L2*1.0D0/a_2**3*m_1*m_2*t308*t309*t311*t314*t326*t327
*t335*t336*(1.5D1/3.2D1))*1.0D0/sqrt(-t308*t314))

!de2
t354 = L2**2
t355 = a_1**2
t356 = G1**2
t357 = 1.0D0/L1**2
t358 = L1**2
t359 = g_1*2.0D0
t360 = cos(t359)
t361 = G2**2
t362 = H**2
t363 = 1.0D0/G1
t364 = cos(g_2)
t365 = sin(g_1)
t366 = t356+t361-t362
t367 = t356**2
t368 = t361**2
t369 = t362**2

```

$$t370 = t367+t368+t369-t356*t361*2.0D0-t356*t362*2.0D0-t361*t362*2.0D0$$

$$\begin{aligned} de2 = & -(k**2*1.0D0/G2**4*L2*a_1*1.0D0/a_2**4*m_1*m_2*t354* \\ & t355*sqrt(-t357*(t356-t358))*((cos(g_1)*sin(g_2)+(t363* \\ & t364*t365*t366*(1.0D0/2.0D0))/G2)*(t356*t357*3.0D0+1.0D0/ \\ & G1**2*1.0D0/G2**2*t357*t370*(t356*5.0D0-t358*7.0D0-t356* \\ & t360*7.0D0+t358*t360*7.0D0)*(5.0D0/8.0D0)-7.0D0)-1.0D0/G2 \\ & **3*t357*t363*t364*t365*t366*t370*(5.0D0/4.0D0))*(1.5D1 \\ & /6.4D1)) \end{aligned}$$

!dg1

$$\begin{aligned} t128 &= L2**2 \\ t129 &= G1**2 \\ t130 &= t129**2 \\ t131 &= G2**2 \\ t132 &= L1**2 \\ t133 &= H**2 \\ t134 &= g_1*2.0D0 \\ t135 &= cos(t134) \\ t136 &= t131**2 \\ t137 &= t133**2 \\ t138 &= 1.0D0/G2**5 \\ t139 &= t128**2 \\ t140 &= a_1**2 \\ t141 &= 1.0D0/L1**2 \\ t142 &= 1.0D0/G1 \\ t143 &= 1.0D0/G1**3 \\ t144 &= 1.0D0/G2**2 \\ t145 &= sin(g_1) \\ t146 &= sin(g_2) \\ t147 &= t131*t133*2.0D0 \\ t148 &= 1.0D0/G2 \\ t149 &= 1.0D0/G1**2 \\ t150 &= t132*t135*7.0D0 \\ t151 &= t129*5.0D0 \\ t152 &= t132*7.0D0 \\ t157 &= t129*t131*2.0D0 \\ t158 &= t129*t133*2.0D0 \\ t153 &= t130+t136+t137-t147-t157-t158 \\ t170 &= t129*t135*7.0D0 \\ t154 &= t150+t151-t152-t170 \\ t155 &= 1.0D0/G2**3 \\ t156 &= t129+t131-t133 \end{aligned}$$

```

t159 = t130-t136-t137+t147
t160 = 1.0D0/a_2**4
t161 = t129-t132
t162 = 1.0D0/L2**2
t163 = t162*(t128-t131)
t164 = sqrt(t163)
t165 = cos(g_1)
t166 = cos(g_2)
t167 = t165*t166
t168 = t167-t142*t145*t146*t148*t156*(1.0D0/2.0D0)
t169 = t129*t141*3.0D0
t171 = t141*t144*t149*t153*t154*(5.0D0/8.0D0)
t172 = t169+t171-7.0D0

dg1 = -(k**2*L2*1.0D0/a_2**3*m_1*m_2*t128*t138*t140*t141*
t143*(t129*t130*6.0D0+t130*t131*2.0D0-t130*t132*5.0D0-
t130*t133*6.0D0+t132*t136*5.0D0+t132*t137*5.0D0-t129*t130
*t135*1.0D1+t130*t131*t135*1.0D1-t131*t132*t133*1.0D1+
t130*t132*t135*5.0D0+t130*t133*t135*1.0D1-t132*t135*t136
*5.0D0-t132*t135*t137*5.0D0+t131*t132*t133*t135*1.0D1)
*(-3.0D0/3.2D1)-k**2*L2*a_1*m_1*m_2*t138*t139*t140*t160*
t164*sqrt(-t141*t161)*(t168*(G1*t141*6.0D0-t141*t142*t144
*t153*(t135*7.0D0-5.0D0)*(5.0D0/4.0D0)+t141*t143*t144*
t154*t159*(5.0D0/4.0D0))+t141*t145*t146*t153*t155*(5.0D0
/2.0D0)-t145*t146*t148*t149*t172*(t129-t131+t133)*(1.0D0
/2.0D0)+t141*t145*t146*t149*t153*t155*t156*(5.0D0/4.0D0)+
t141*t145*t146*t149*t155*t156*t159*(5.0D0/2.0D0))*(1.5D1
/6.4D1)+k**2*G1*L2*a_1*m_1*m_2*t138*t139*t140*t141*t160*
t164*(t168*t172+t141*t142*t145*t146*t153*t155*t156*(5.0D0
/4.0D0))*1.0D0/sqrt(-t141*t161)*(1.5D1/6.4D1))&
+(3.d0*(k**8)*(m_1**5)*(m_0**5))/((Vitesse_lumiere**2)*(L1
**3)*(G1**2)*(m_0+m_1))&
+((m_1**7)*(m_0**7)*(k**6)*k_love*(1.d0+m_1/m_0)*(R_primaire
**5)*Vitesse_rotation**2)/(((m_0+m_1)**4)*2.d0*(L1**3)*(
G1**4))&
+(15.d0*(m_0**(12))*(m_1**(14))*k_love*(R_primaire**5)*(k
**14)*((G1**4)-14.d0*(L1**2)*(G1**2)+21.d0*(L1**4)))/(((
m_0+m_1)**6)*8.d0*(G1**(10))*(L1**7))

!dg2

t226 = L2**2
t227 = G1**2
t228 = G2**2

```

```

t229 = H**2
t230 = 1.0D0/G1**2
t231 = 1.0D0/G2**2
t232 = 1.0D0/L1**2
t233 = L1**2
t234 = t227**2
t235 = t228**2
t236 = t229**2
t237 = t227*t228*2.0D0
t238 = t226**2
t239 = a_1**2
t240 = t227-t233
t247 = t227*t229*2.0D0
t248 = t228*t229*2.0D0
t241 = t234+t235+t236-t237-t247-t248
t242 = 1.0D0/G1
t243 = sin(g_1)
t244 = sin(g_2)
t245 = g_1*2.0D0
t246 = cos(t245)
t249 = t233*t246*7.0D0
t250 = t227*5.0D0
t251 = t233*7.0D0
t266 = t227*t246*7.0D0
t252 = t249+t250-t251-t266
t253 = 1.0D0/G2**4
t254 = t227+t228-t229
t255 = t234-t235+t236-t247
t256 = 1.0D0/a_2**4
t270 = t232*t240
t257 = sqrt(-t270)
t258 = 1.0D0/L2**2
t259 = t258*(t226-t228)
t260 = cos(g_1)
t261 = cos(g_2)
t262 = t260*t261
t263 = 1.0D0/G2
t272 = t242*t243*t244*t254*t263*(1.0D0/2.0D0)
t264 = t262-t272
t265 = t227*t232*3.0D0
t267 = t230*t231*t232*t241*t252*(5.0D0/8.0D0)
t268 = t265+t267-7.0D0
t269 = 1.0D0/G2**3
t271 = sqrt(t259)
t273 = t264*t268
t274 = t232*t241*t242*t243*t244*t254*t269*(5.0D0/4.0D0)

```

```

t275 = 1.0D0/G2**6
t276 = 1.0D0/a_2**3
t277 = t227*3.0D0
t278 = t233*5.0D0

dg2 = -(k**2*L2*m_1*m_2*t226*t239*t253*t276*(t230*t231*t232
*(t277-t278)*(t234*3.0D0+t235*3.0D0+t236*3.0D0+t237-t227*
t229*6.0D0-t228*t229*6.0D0)*(1.0D0/4.0D0)-t230*t231*t232*
t240*t241*t246*(1.5D1/4.0D0))*(3.0D0/1.6D1)+k**2*L2*a_1*
m_1*m_2*t238*t239*t256*t257*t271*t275*(t273+t274)*(7.5D1
/6.4D1)+k**2*L2*m_1*m_2*t226*t230*t232*t239*t255*t275*
t276*(t277-t278-t227*t246*5.0D0+t233*t246*5.0D0)*(3.0D0
/3.2D1)+k**2*1.0D0/G2**5*L2*a_1*m_1*m_2*t238*t239*t256*
t257*t271*(t231*t232*t241*t242*t243*t244*(-5.0D0/2.0D0)+
t230*t232*t252*t255*t264*t269*(5.0D0/4.0D0)+t231*t242*
t243*t244*t268*(-t227+t228+t229)*(1.0D0/2.0D0)+t232*t241*
t242*t243*t244*t253*t254*(5.0D0/4.0D0)+t232*t242*t243*
t244*t253*t254*t255*(5.0D0/2.0D0))*(1.5D1/6.4D1)+k**2*L2*
a_1*m_1*m_2*t226*t239*t253*t256*t257*1.0D0/sqrt(t259)*(
t273+t274)*(1.5D1/6.4D1))

! OUT
k_out(1)=de1
k_out(2)=de2
k_out(3)=dg1
k_out(4)=dg2

END SUBROUTINE equations_mouvement_avec_correction

SUBROUTINE RK4(x,t,var,x_suivant,Correction)

USE parametres
IMPLICIT NONE
! IN
REAL(KIND(1.0D0)), DIMENSION(:), INTENT(IN) :: x
REAL(KIND(1.0D0)), DIMENSION(:), INTENT(IN) :: var
REAL(KIND(1.0D0)), INTENT(IN) :: t
INTEGER(KIND(1.0D0)), INTENT(IN) :: Correction
! OUT
REAL(KIND(1.0D0)), DIMENSION(0:SIZE(x)-1), INTENT(OUT) ::
    x_suivant
! INTERN
REAL(KIND(1.0D0)), DIMENSION(0:SIZE(x)-1) :: k_1,k_2,k_3,k_4
    ,transit

```

```

! Correction=2 si on tient compte des effets , Correction=1
! sinon
IF (Correction==2) THEN

CALL equations_mouvement_avec_correction(x,t,var,k_1)
transit=x+h_pas*0.5d0*k_1
CALL equations_mouvement_avec_correction(transit,t+h_pas*0.5
d0,var,k_2)
transit=x+h_pas*0.5d0*k_2
CALL equations_mouvement_avec_correction(transit,t+h_pas*0.5
d0,var,k_3)
transit=x+h_pas*1.d0*k_3
CALL equations_mouvement_avec_correction(transit,t+h_pas,var
,k_4)
x_suivant=x+h_pas*(1.0d0/6.0d0)*(k_1+2.0d0*k_2+2.0d0*k_3+k_4
)

ELSE

CALL equations_mouvement_sans_correction(x,t,var,k_1)
transit=x+h_pas*0.5d0*k_1
CALL equations_mouvement_sans_correction(transit,t+h_pas*0.5
d0,var,k_2)
transit=x+h_pas*0.5d0*k_2
CALL equations_mouvement_sans_correction(transit,t+h_pas*0.5
d0,var,k_3)
transit=x+h_pas*1.d0*k_3
CALL equations_mouvement_sans_correction(transit,t+h_pas,var
,k_4)
x_suivant=x+h_pas*(1.0d0/6.0d0)*(k_1+2.0d0*k_2+2.0d0*k_3+k_4
)

END IF

END SUBROUTINE RK4

END MODULE integrateurRK4

```

2. Paramètres

```

MODULE parametres

! definition de pi
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: pi=2.d0*atan2(1.d0,0.
d0)

! definition de la constante gravitationnelle
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: k=sqrt(4.d0*pi**2.d0)

```

```

! Vitesse de la lumiere. Unites= UA/annees
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: Vitesse_lumiere
    =6.3284857971d0*1.d4

! Nombre de Love
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: k_love=0.02d0

! pas d'integration
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: h_pas=1.d0
! nombre utilisé pour déterminer les "points" de l'
    intégration que nous gardons (par exemple, nous
    intégrons
! avec un pas d'un an, mais ne retenons que de 100 en 100)
INTEGER(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: h_reel= 10.d0

! temps initial et final d'integration
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: t_init=0.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: t_final=2.d0*1.d7

! Masses de l'etoile primaire, de l'etoile secondaire et
    de l'exoplanete (Unites: sans unite, par raport à la
    masse solaire)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_0=1.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_1=0.9545d0*1.d-3
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: m_2=0.9545d0*1.d-3

! Excentricite
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: excentricite1
    =0.01671022d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: excentricite2=0.01d0

! Arguments du periastre g (Unites: rad)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: argument_periastre_1
    =0.d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: argument_periastre_2
    =0.d0

! Demi-grands axes
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: demi_grand_axe_1=0.05
    d0
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: demi_grand_axe_2=5.2d0

! Inclinaison mutuelle. Unites=rad. i=i1+i2 par rappot au
    plan du rayon solaire
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: i=0.d0

```

```

! Vitesse de rotation de l'etoile primaire, ici, période
  de rotation = 30 jours. Unites=rad/annees (a entrer en
  rad/s)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: Vitesse_rotation
  =31557600.d0*2.6658d0*1.d-6

! Rayon etoile primaire en UA (essai)
REAL(KIND=KIND(1.D0)), parameter :: R_primaire=1.d0
  *4.65476d0*1.d-3

END MODULE parametres

```

G.2.3 Calculs des équations du mouvement

Les équations présentes dans le module "integrateurRK4" ont été calculées à l'aide du calcul symbolique, via Mupad (Matlab). Voici les commandes utilisées.

```

reset ();
i:=arccos((H^2-G1^2-G2^2)/(2*G1*G2)):
B:=7-5*(G1/L1)^2-7*(1-(G1/L1)^2)*cos(2*g_1):
A:=7-3*(G1/L1)^2-5/2*(1-(cos(i))^2)*B:
alpha:=a_1/a_2:
Hamiltonien octupole (dans les bonnes variables de Delaunay)
hamiltonien_article:=-alpha^2*G*m_1*m_2*L2^3/(16*a_2*G2^3)
  *[(2+3*(1-(G1/L1)^2))*(3*(cos(i))^2-1)+15*(1-(G1/L1)^2)*(1-(
  cos(i))^2)*cos(2*g_1)]+alpha^3*15*G*m_1*m_2*L2^5/(64*a_2*G2
  ^5)*sqrt(1-(G1/L1)^2)*sqrt(1-(G2/L2)^2)*[A*(-cos(g_1)*cos(g_2
  )-cos(i)*sin(g_1)*sin(g_2))+10*(G1/L1)^2*cos(i)*(1-(cos(i))
  ^2)*sin(g_1)*sin(g_2)]:
derivee_B:=diff(B,G1):
derivee_A:=diff(A,G1):
derivee_cosi:=diff(cos(i),G1):
e_1:=sqrt(1-(G1/L1)^2):
e_2:=sqrt(1-(G2/L2)^2):
de1dG1:=diff(e_1,G1):
de2dG2:=diff(e_2,G2):
dg1/dt
dHdG1:=simplify(diff(hamiltonien_article,G1)):
dHdG1:=coerce(dHdG1, DOM_LIST):
dHdG1:=dHdG1[3][1]:
dg1dt:=simplify(dHdG1):
generate::fortran(generate::optimize([x[1]=dg1dt]))

dg2/dt
dHdG2:=simplify(diff(hamiltonien_article,G2)):
dHdG2:=coerce(dHdG2, DOM_LIST):

```



```

dHdG2:=dHdG2[3][1]:
dg2dt:=simplify(dHdG2):
generate::fortran(generate::optimize([x[1]=dg2dt]))

```

```

de1/dt
dHdg1:=simplify(diff(hamiltonien_article,g_1)):
dHdg1:=coerce(dHdg1, DOM_LIST):
dHdg1:=dHdg1[3][1]:
de1dt:=simplify(-de1dG1*dHdg1):
generate::fortran(generate::optimize([x[1]=de1dt]))

```

```

de2/dt
dHdg2:=simplify(diff(hamiltonien_article,g_2)):
dHdg2:=coerce(dHdg2, DOM_LIST):
dHdg2:=dHdg2[3][1]:
de2dt:=simplify(-de2dG2*dHdg2):
generate::fortran(generate::optimize([x[1]=de2dt]))

```